П. А. ЛАРИЧЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

ЧАСТЬ

II

для 8–10 классов средней школы

МОСКВА

1958

П. А. ЛАРИЧЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

ЧАСТЬ II

ДЛЯ 8—10 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

9-е ИЗДАНИЕ

Утверждён Министерством просвещения РСФСР

Москва—1958

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА.

С 1957 г. „Сборник задач по алгебре“, ч. II, печатается для VIII, IX и X классов.

Материал VIII класса печатается без изменения с отдельного издания 1956 г., а IX и X классов переработан в соответствии с новой программой для средней школы.

ГЛАВА I.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ И УГЛУБЛЕНИЯ ПРОЙДЕННОГО[1].

§ 1. Тождественные преобразования алгебраических выражений.

1. Если n — целое число, то какие числа обозначают следующие алгебраические выражения: $2n$; $2n+1$; $3n$; $3n+1$?

2. 1) Доказать, что сумма чётного и нечётного числа есть число нечётное.

2) Доказать, что сумма двух нечётных чисел есть число чётное.

3) Доказать, что сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

4) Доказать, что если n — целое число, то $\frac{n(n+1)}{2}$ — целое число.

3. Сформулировать и доказать тождества:

$$1)\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$2)\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$3)\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$4)\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$5)\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$
$$6)\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;$$
$$7)\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

4. Используя формулы предыдущей задачи, доказать следующие тождества:

$$1)\ \frac{(m+n)^2}{2}+\frac{(m-n)^2}{2}=m^2+n^2;$$
$$2)\ \left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn;$$
$$3)\ \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2=1.$$

---

[1]) Предполагается, что повторение будет проводиться параллельно с прохождением нового материала.

5. 1) Доказать, что разность между квадратом суммы двух чисел и учетверённым их произведением равна квадрату разности тех же чисел.

2) Доказать, что сумма квадрата разности двух чисел и учетверённого их произведения равна квадрату суммы тех же чисел.

Разложить на множители:

6. (Устно.) 1) ab^4-4ax^2; 2) $a^2+2ab+b^2-9$; 3) $1-x^2-2xy-y^2$; 4) $ab+ac+b^2+2bc+c^2$.

7. 1) m^4+m^3+m+1; 2) n^4+n^3-n-1; 3) a^4-b^4; 4) x^6-y^6.

8. 1) $(x+y)^3-(x-y)^3$; 2) $(x+y)^4-(x-y)^4$.

9*. 1) $x^2-8x+15$; 2) a^2-a-12; 3) $m^2+3m-10$; 4) $2x^2+10x+12$.

10*. 1) $m^4+m^2n^2+n^4$; 2) x^8+x^4+1; 3) x^3-3x+2; 4) a^3+3a^2-4.

11*. 1) a^3+a^2-2; 2) $m^3+8m^2+19m+12$; 3) $n^6-n^4+2n^3+2n^2$; 4) $m^4+5m^3+15m-9$.

12*. 1) $a^3+6a^2+11a+6$; 2) $c^3+8c^2+17c+10$; 3) $a^4+a^3+6a^2+5a+5$; 4) $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$.

13. Найти числовое значение следующих выражений, выполнив предварительно упрощения[1]:

1) $6a+\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right):\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}$ при $a=-2{,}5$;

2) $\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}\right)$ при $a=-3\frac{3}{4}$;

3) $\left[\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^3\frac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right]\cdot\frac{n}{3}$ при $n=-0{,}5$;

4) $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$

при $a=-2{,}5$; $b=-0{,}5$.

Выполнить указанные действия:

14. 1) $\left[\left(1-\frac{2}{1-3a}\right)\left(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right]:\left[2\left(1-9a^2\right)\right]$;

---

* Задачи, отмеченные звёздочкой, могут быть предназначены для индивидуальных заданий и для внеклассных занятий учащихся.

[1] В случае отсутствия знака $\approx$ или специального указания о точности данные считать точными.

2) $\frac{2}{a}-\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{2}{1-a}\right):\frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}$;

3) $\frac{3}{2}-\left[\frac{(0,5n+1)\,n}{n^3-1}+\frac{1}{2-2n}+\frac{1}{n^2+n+1}\right]\cdot\frac{n^3+n^2+n}{n-1}$;

4) $\left[\frac{a+c}{a^3c+a^2-ac-1}+\frac{ac+1}{1-a^2}:(a+c)\right]\cdot\frac{a^3+c^3}{3-3c^2}$.

15. 1) $2n-\left(\frac{2n-3}{n+1}-\frac{n+1}{2-2n}-\frac{n^2+3}{2n^2-2}\right)\cdot\frac{n^3+1}{n^2-n}$;

2) $\left[\left(\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^3-y^3}\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right):\frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right]\cdot\frac{3}{x+y}$;

3) $\dfrac{\left(1-\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}\right)\cdot\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\frac{a+b}{2}}{\left(1+\frac{3b-a}{a+b}\right)\cdot(a^2-b^2)}$;

4) $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1+c)-a}{bc}$.

16. 1) Упростить выражение

$$\left(\frac{a}{a-2b}+\frac{b}{a+2b}\right)\cdot\frac{a^3+8b^3}{a^3+3a^2b-2ab^2}$$

и найти его числовое значение при $a=0{,}5$; $b=-0{,}25$.

2) Упростить выражение

$$\frac{a+2b}{3a-3b}-\frac{3c-a}{2a-2c}+\frac{a^2-bc}{a^2-ac+bc-ab}$$

и найти его числовое значение при $a=\frac{1}{6}$; $b=-1$.

На каждый из следующих вопросов (№ 17—20) дать обоснованный ответ и привести пример.

17. 1) Как расположены на числовой оси точки, изображающие числа, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку?

2) Могут ли два взаимно обратных по величине числа быть противоположными по знаку?

3) Можно ли сказать, что $(-a)$ изображает отрицательное число?

4) Известно, что абсолютная величина числа a больше абсолютной величины числа b. Можно ли сказать, что $a>b$?

18. 1) Может ли сумма $a+b$ быть меньше разности $a-b$?

2) Можно ли утверждать, что $2a>a$?

3) Известно, что $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Можно ли утверждать, что $a+b\neq 0$? $a\cdot b\neq 0$?

19. 1) Даны два числа a и b. Чему равно расстояние между соответствующими им точками на числовой оси?

2) Известно, что абсолютная величина a меньше 2. Где на числовой оси может быть расположена точка, соответствующая числу a?

3) Можно ли сказать, что $(a-b)^2$ есть положительное число при всех значениях a и b?

4) Равны ли между собой выражения: $-m^2$ и $(-m)^2$? $-m^3$ и $(-m)^3$?

20. 1) Может ли при некоторых частных значениях a и b иметь место равенство: $(a+b)^2=a^2+b^2$?

2) Можно ли утверждать, что $(a-b)^2=(b-a)^2$? $(a-b)^4=$ $=(b-a)^4$? $(a-b)^3=(b-a)^3$?

3) Для каких значений a и b равенство $(a-b)^3=(b-a)^3$ возможно?

21. 1) При каких значениях a следующие выражения не имеют смысла:

$$\frac{1}{a-4};\quad \frac{2}{a+1};\quad \frac{b^2}{a^2-4};\quad \frac{1}{a^2+1}\ ?$$

2) При каком условии

$$\frac{3a-6b}{a+b}=0;\qquad \frac{2a-b}{b-a}=1?$$

§ 2. Уравнения первой степени с одним неизвестным.

Решить уравнения:

22. 1) $2x(3x-2)-3\left[1-(2-x)(2x+3)-\frac{x-3}{2}\right]=13;$

2) $3\left\{x-\frac{3x-1}{4}-\left[1-2\left(x-\frac{3+x}{5}\right)\right]\right\}=5x-2.$

23. 1) $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x(x+1)^2}=\frac{5}{2x(x+1)};$

2) $\frac{2x+19}{5x^2-5}-\frac{17}{x^2-1}-\frac{3}{1-x}=0.$

24. 1) $\frac{3x-3}{2x^2-2}-\frac{2x+2}{3x^2+6x+3}=\frac{5(x-1)}{12x^2-24x+12};$

2) $\frac{6}{4-x}=\frac{25}{1-3x}-\frac{16}{x-4}.$

Решить относительно x следующие уравнения с буквенными коэффициентами:

25. 1) $\frac{x+a}{a-x}+\frac{x-a}{a+x}=\frac{a}{a^2-x^2};$

2) $\frac{x}{a}-1:\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)=1:\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right).$

26. 1) $[(n-1)^2+n]:\left[\frac{(n+1)^3}{3n}-n-1\right]=x:\left[\frac{(n-1)^2}{4n}+1\right]$;

2) $\frac{x}{a}(3ab+1)=\frac{3ab}{1+a}+\frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}+\frac{a^2}{(a+1)^3}$.

27. 1) $\frac{am}{a^2-b^2}-\frac{x+m}{a+b}=\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}-\frac{ax}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\frac{2}{a^2-ac-ax+cx}+\frac{1}{x^2-ax-cx+ac}=\frac{1}{c^2-cx-ac+ax}$.

28. 1) $\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}$;

2) $\frac{kx-lx}{2k+2l}+\frac{klx}{k^2-l^2}-\frac{k-x}{k-l}=\frac{x}{2}+\frac{k+x}{k+l}$.

Следующие уравнения решить относительно букв, входящих в уравнение:

29. 1) $\frac{3a+k}{k}-5=\frac{b}{k}$, решить относительно k; a; b;

2) $ax+bx=cx$, решить относительно x; a; c.

30. 1) $m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$, решить относительно m; a;

2) $a-\frac{a+b}{x}=b-\frac{a-b}{x}$, решить относительно x; a; b;

3) $\frac{an+by}{n+y}=c$, решить относительно y; n; b.

§ 3. Неравенства первой степени.

Решить неравенства (№ 31—32 устно) и отметить на числовой оси полученные решения:

31. 1) $x+3>8$; 2) $4+x<12$;
3) $1-x<2$; 4) $10<12-x$.

32. 1) $x-1<0$; 2) $2x+3>13$;
3) $2x+8<10$; 4) $3x+5>5$.

33. 1) $13x+4>5x+20$; 2) $3(x+2)<2+5x$;
3) $-3(x+10)>-20$; 4) $16-3(2x-5)<3-16x$.

34. Определить, при каких значениях x следующие выражения положительны:

1) $3x-15$; 2) $12-4x$; 3) $2(x+1)-3$;
4) $5(x-1)-2(x-2)$; 5) $\frac{x-5}{2}$; 6) $\frac{x+3}{4}$.

35. Определить, при каких значениях x следующие выражения отрицательны:

$$1)\ x-4;\quad 2)\ 2x-6;\quad 3)\ 2(x+3)-x;$$
$$4)\ 4x-(x+1)3;\quad 5)\ \frac{2x-1}{3};\quad 6)\ \frac{2x+5}{2}.$$

36. Найти и указать на числовой оси целые значения x, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$1)\ 0<x<5;\quad 2)\ 1<x<4;\quad 3)\ 1\tfrac{1}{2}<x<5\tfrac{3}{4};$$
$$4)\ -6<x<-1;\quad 5)\ -2<x<2;$$
$$6)\ -3{,}5<x<-0{,}4.$$

37. 1) Известно, что $|x|<1$. Где на числовой оси может лежать точка, изображающая x?

2) Известно, что $|x|>1$. Где на числовой оси может лежать точка, изображающая x?

38*. Решить неравенства:

$$1)\ |x-1|>2;\qquad 2)\ |x+2|<3;$$
$$3)\ |x-5|<8;\qquad 4)\ |x+4|<7.$$

§ 4. Системы уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Решить системы уравнений с двумя неизвестными:

39. 1) $\begin{cases} \dfrac{7x-3y}{5}=\dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2}, \\ 3(x-1)=5(y+1); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{1}{5}(x+2)=1{,}1, \\ x-2y+4=\dfrac{1}{4}\left[2x+3\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\right]. \end{cases}$

40. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}-y=\left\{\dfrac{1}{3}[x-5(y-0{,}3)]-1\right\}+1{,}2, \\ 3\left[1-\dfrac{2-3(x-y)}{5}\right]+6{,}94=2(3x-1); \end{cases}$

2) $1-\dfrac{x+5y}{7}=4x-3y-80=\dfrac{1}{21}[2-2(x-7)-y].$

41. 1) $(x+2y-7):(2y-x+15):(2x+y+19)=1:2:3;$

2) $(3x+y-3):(4x-2y+1):(5x-3y+8)=6:3:5.$

42. $\begin{cases} b-5[15-(3-a)]=11-8[7(3a-5)+3b], \\ 41(3a+2b)=4\{5[22-3(5-2a)]-13b\}. \end{cases}$

43. 1) $\begin{cases} \dfrac{3}{2a+b}+\dfrac{7}{a-b}=1{,}9, \\ \dfrac{5}{a-b}-\dfrac{2}{2a+b}=1{,}15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{11}{2r-3s}+\dfrac{18}{3r-2s}=13, \\ \dfrac{27}{3r-2s}-\dfrac{2}{2r-3s}=1. \end{cases}$

§ 5. Функциональная зависимость и способы её выражения. Прямая и обратная пропорциональность величин.

44. Результаты измерений температуры воздуха в течение суток записаны в следующей таблице:

Время суток в часах	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура в С° . . .	+2	−0	−3	−5	0	4	6	9	6	3	1	0	−2

1) По данным таблицы построить график изменения температуры воздуха в течение суток.

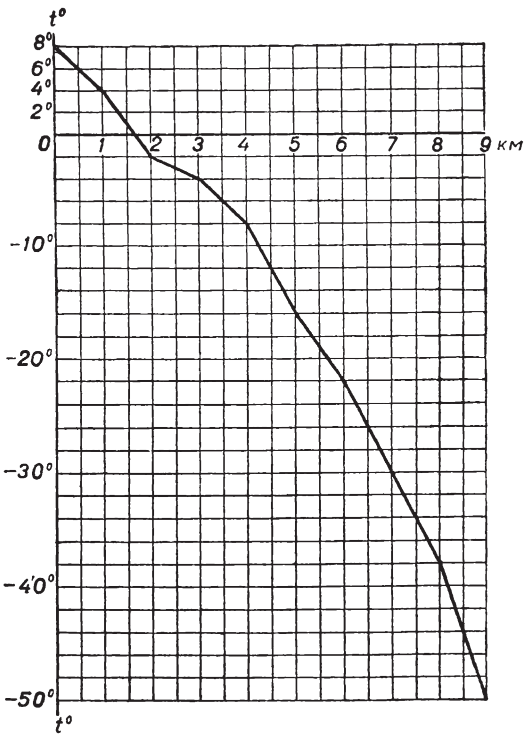
2) По графику определить температуру воздуха: в 3 часа; в 9 час.; в 13 час.; в 21 час.

3) Найти по графику, в какое время температура воздуха была равна: — 1°; — 4°; + 2°; + 5°.

4) Установить по графику, в какой промежуток времени температура поднималась; опускалась.

5) Найти по графику, когда в течение суток температура была самой высокой; самой низкой.

45. На чертеже 1 построен график изменения температуры окружающего воздуха в зависимости от изменения высоты подъёма, причём на горизонтальной оси указана высота подъёма в километрах, а на вертикальной оси — температура воздуха в градусах С.



Черт. 1.

Определить по графику:

1) Температуру воздуха на высоте 4 *км*; 6 *км*; 8 *км*; на поверхности земли.

2) На какой высоте температура воздуха была равна 4°? — 16°? — 48°? — 30°?

3) Пользуясь графиком, описать изменение температуры окружающего воздуха в зависимости от изменения высоты подъёма.

46. В 8 час. утра из города *M* в город *N* вышел турист. В первый час он прошёл 5 *км*, затем на подъёме он в течение часа прошёл только 3 *км*, после чего 30 мин. отдыхал. Проходя дальше в среднем 4 *км* в час, турист пришёл в город *N* в 12 час. дня.

1) Составить таблицу изменения пути туриста в зависимости от изменения времени и по данным таблицы построить соответствующий график.

2) Определить по графику, на каком расстоянии от города *M* турист был в 9 час.; в 10 час. 30 мин.; в 11 час.

На каком расстоянии от города *M* и в какое время дня он остановился для отдыха?

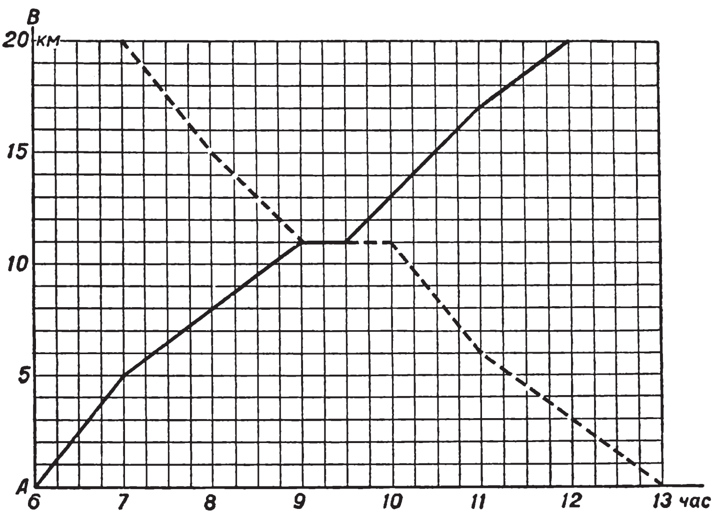
На каком расстоянии от города *M* находился город *N*?

В какое время дня турист находился от города *M* на расстоянии 6 *км*? 10 *км*? 2 *км*? 14 *км*?

47. На чертеже 2 изображён график движения двух туристов, вышедших навстречу друг другу из пунктов *A* и *B*.

Определить по графику:

1) В котором часу вышел каждый турист?



Черт. 2.

2) Сколько времени находился в пути каждый из них?

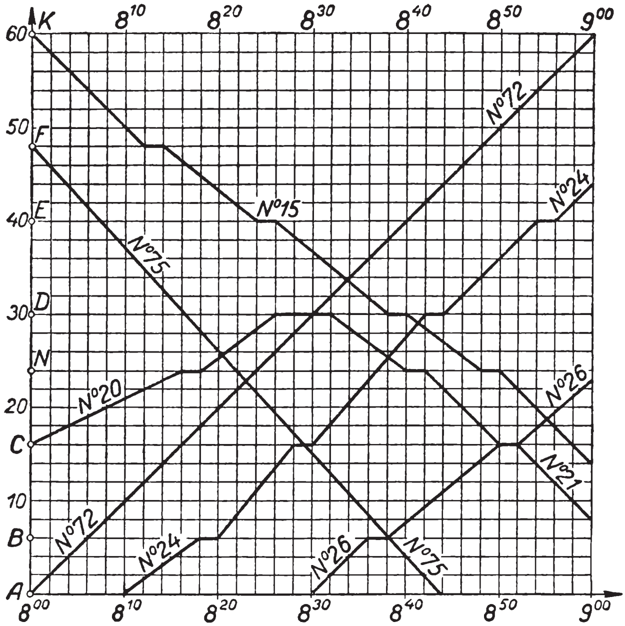
3) Сколько времени каждый турист затратил на движение и на отдых?

4) Когда и на каком расстоянии от пункта A они встретились?

5) Найти среднюю скорость движения каждого туриста в час.

6) Составить по графику таблицу изменения пути каждого туриста в зависимости от изменения времени.

48. На чертеже 3 изображён график движения пригородных поездов двухколейной железной дороги от 8 час. до 9 час.



Черт. 3.

1) Дать по графику описание движения каждого поезда, указав время прибытия и отправления поездов со станций A, B, C, N, D, E, F, K, а также скорость движения поездов между станциями.

2) Составить по графику расписание движения поездов.

49. Тело движется равномерно со скоростью 4 *км* в час.

1) Написать формулу, выражающую путь s этого тела за t часов.

2) Составить таблицу значений s при t, равном 0; 1; 2; 3; 4.

3) По данным таблицы построить график изменения пути данного тела в зависимости от изменения времени движения.

4) Найти по графику путь, пройденный телом за 1 час 30 мин.; за 3,5 часа.

5) Найти по графику, за какое время тело пройдёт 10 *км*; 6 *км*.

6) Доказать, что отношение ординаты любой точки полученного графика к её абсциссе равно 4.

7) Доказать, что если точка не лежит на данном графике, то отношение её ординаты к соответствующей абсциссе не равно 4.

8) Как называется зависимость между s и t?

9) Какой формулой выражается прямо пропорциональная зависимость двух величин?

10) Что является графиком прямо пропорциональной зависимости?

50. 1) Зная, что величина y изменяется прямо пропорционально величине x, заполнить следующую таблицу:

x	8	6	4	2	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-6	-8
y	4											

2) Написать формулу, выражающую зависимость y от x.

3) Построить график данной функции.

51. Известно, что величина y прямо пропорциональна величине x, причём коэффициент пропорциональности равен 2.

1) Написать формулу, выражающую зависимость y от x.

2) Заполнить следующую таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4
y											

3) Построить график данной функции.

52. Построить (на одном чертеже) графики функций: $y=3x$; $y=-3x$.

Указать различие в расположении полученных графиков относительно осей координат (черт. 4).

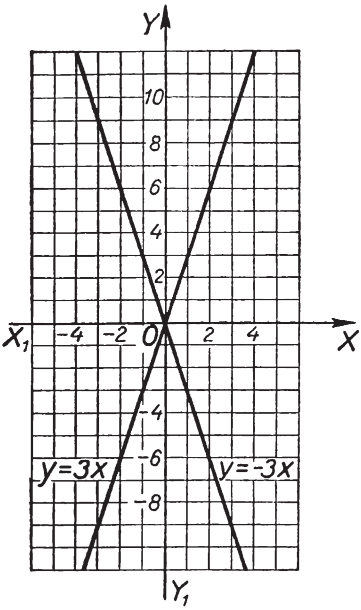
53. 1) Построить на одном и том же чертеже графики функций:

$$y=\frac{1}{3}x; \quad y=-\frac{1}{3}x; \quad y=3x; \quad y=-3x.$$

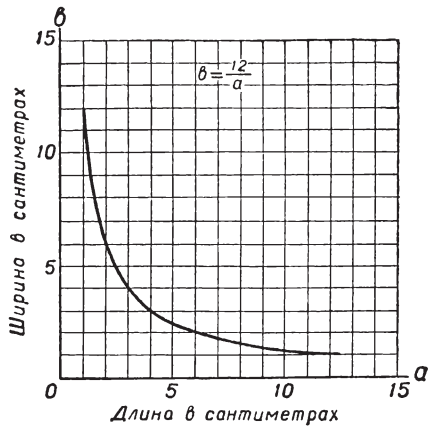
2) Выяснить изменение положения прямой относительно осей координат при изменении углового коэффициента.

54. 1) Начертить прямую, проходящую через начало координат и точку $M(3;\ 6)$.

2) Написать уравнение этой прямой.



Черт. 4.



Черт. 5.

55. Прямая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент, равный 4.

1) Написать уравнение этой прямой и начертить её.

2) Лежит ли точка M (2; 5) на данной прямой?

56. Площадь прямоугольника равна 12 $см^2$; длина его a сантиметров.

1) Найти ширину прямоугольника, обозначив её буквой b.

2) Вычислить $b=\frac{12}{a}$ при следующих значениях a:

Длина в сантиметрах	a	1	2	3	4	5	6	8	12
Ширина в сантиметрах	b								

3) Используя таблицу значений a и b, доказать, что при данной площади ширина прямоугольника обратно пропорциональна его длине.

4) Построить график изменения ширины прямоугольника в зависимости от изменения его длины (сравнить с чертежом 5).

5) Найти по графику значение b при a, равном: 1,5; 2,4; 9.

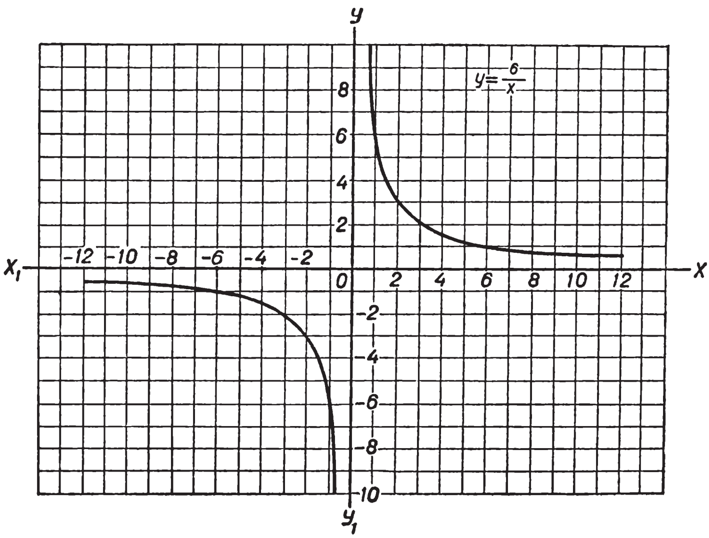
6) Найти по графику значение a при b, равном: 10; 5; 8.

7) На том же чертеже, где вычерчен график $b=\frac{12}{a}$, построить прямоугольники, у которых a равно: 1, 2, 3, 4, 6, и доказать, что площадь каждого прямоугольника равна 12 $см^2$.

57. Построить график функции $y=\frac{6}{x}$, давая x следующие значения:

x	-12	-10	-8	-6	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	6	8	10	12
y																

1) Как расположен график относительно осей координат (черт. 6)?



Черт. 6.

2) Найти по графику значения y при x, равном: -3; 3; $-1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{5}$; $-1\frac{1}{5}$.

3) Найти по графику значения x при y, равном: 1; -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

4) Как называется зависимость между y и x, выражаемая уравнением $y=\frac{m}{x}$?

5) Что является графиком обратно пропорциональной зависимости?

58. Известно, что величина y обратно пропорциональна величине x, причём коэффициент пропорциональности равен 16.

1) Написать уравнение, выражающее зависимость y от x.

2) Заполнить следующую таблицу:

x	1	2	4	8	12	16	−1	−2	−4	−8	−12	−16
y	16											

3) Построить график данной функции.

59. 1) Зная, что величина y изменяется обратно пропорционально величине x, заполнить следующую таблицу:

x	1	2	4	8	−1	−2	−4	−8	−12
y	4								

2) Написать уравнение, выражающее зависимость y от x.

3) Построить график данной функции.

60. Построить на одном чертеже графики функций:

$$1)\ y=\frac{8}{x};\quad 2)\ y=-\frac{8}{x}.$$

Как расположен относительно осей координат график каждой из данных функций?

61. (Устно.) В следующих примерах указать величины прямо пропорциональные и величины обратно пропорциональные:

1) Длина окружности и длина её диаметра.

2) Количество рабочих и время выполнения данной работы.

3) Время и скорость равномерного движения при постоянном пути.

4) Стоимость товара и его количество при постоянной цене товара.

5) Цена 1 *кг* товара и количество товара при постоянной стоимости товара.

62. (Устно.) Формула $S=\frac{bh}{2}$ выражает площадь (S) треугольника в зависимости от его основания (b) и высоты (h). Как изменится S, если:

1) h увеличить в 5 раз? 2) b уменьшить в 3 раза?

3) h увеличить в 6 раз, а b уменьшить в 2 раза?

4) Как изменяется площадь треугольника в зависимости от изменения высоты?

63. (Устно.) Число оборотов колеса диаметра d метров на расстоянии s метров определяется по формуле: $n=\frac{s}{\pi d}$, где π — постоянное число, приближённо равное 3,14.

Как изменится число оборотов n, если:

1) s увеличить в 2 раза? 2) d увеличить в 3 раза?

3) s уменьшить в 4 раза, а d увеличить в 2 раза?

4) s и d увеличить в 3 раза?

5) s увеличить в 3 раза, а d уменьшить в 2 раза?

6) Как изменяется число оборотов колеса:

а) в зависимости от изменения его диаметра?

б) в зависимости от изменения пройденного расстояния?

§ 6. Линейная функция.

64. Поезд вышел со станции A и, пройдя при разгоне 2 *км*, стал двигаться равномерно со скоростью 40 *км* в час.

1) Найти, на каком расстоянии s от станции A будет находиться поезд через t часов равномерного движения.

2) Вычислить значения s при следующих значениях t:

t часов	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
s километров										

3) Начертить график изменения расстояния s в зависимости от изменения времени t равномерного движения поезда.

Указание. На горизонтальной оси откладываются значения t, на вертикальной оси — значения s (черт. 7).

4) В чём заключается сходство и различие полученного графика с графиком прямой пропорциональной зависимости?

5) Проверить вычислением и по графику, что значения s изменяются непропорционально изменениям значений t.

6) Как называется функция вида

$$s=40t+2?$$

7) Доказать, что точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=mx+n$, лежат на прямой линии.

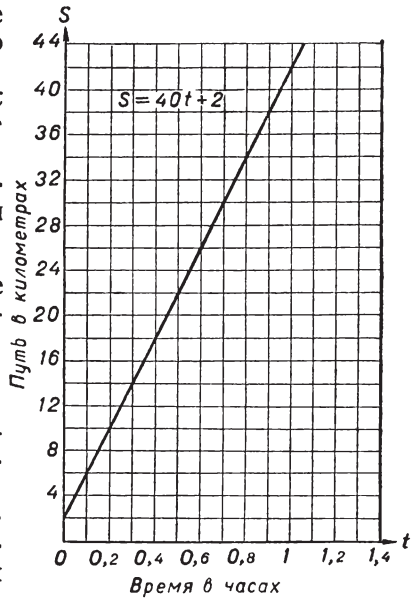
65. На одном и том же чертеже построить графики функций $y=2x$ и $y=2x+3$, заполнив предварительно следующую таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x$									
$y=2x+3$									

1) Чем отличается положение построенных прямых относительно осей координат?

2) Доказать, что прямые $y=2x$ и $y=2x+3$ параллельны друг другу.

3) Найти длину отрезка, отсекаемого на оси y прямой $y=2x+3$.



Черт. 7.

66. 1) На одном и том же чертеже построить графики функций:

$$y=3x+2 \text{ и } y=-3x+2.$$

2) Установить, в чём заключается сходство и различие полученных графиков.

3) Доказать, что с увеличением x функция $y=3x+2$ равномерно возрастает, а функция $y=-3x+2$ равномерно убывает.

4) Доказать, что отношение любого приращения функции к соответствующему приращению аргумента x для $y=3x+2$ равно 3, а для функции $y=-3x+2$ равно (-3).

67. 1) На одном и том же чертеже построить графики следующих функций:

$$y=\frac{1}{2}x+4; \qquad y=\frac{1}{2}x-4;$$

$$y=-\frac{1}{2}x+4; \qquad y=-\frac{1}{2}x-4.$$

Найти координаты точек, в которых каждый график пересекает ось y и ось x.

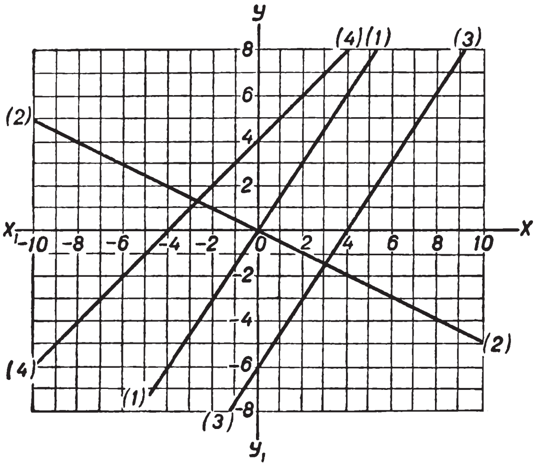
2) Найти „наклон“ каждой прямой (угловой коэффициент).

3) Вычислить значение x, при котором соответствующее значение y равно 3 (для каждого уравнения), и проверить результат по графику.

68. Построить на одном чертеже следующие графики:

$$1)\ y=2; \qquad 2)\ y=-2;$$
$$3)\ x=4; \qquad 4)\ x=-4;$$
$$5)\ x=0; \qquad 6)\ y=0.$$

Как расположена каждая прямая относительно осей координат?



Черт. 8.

69. Построить графики:

$$1)\ x-y=0;$$
$$2)\ x+y=0;$$
$$3)\ 2x-5y=0;$$
$$4)\ 3x-y=6;$$
$$5)\ 3x+2y=5.$$

Найти для каждого графика точки пересечения с осями координат; наклон прямой (угловой коэффициент).

70. Написать уравнение вида $y=kx+m$ каждой из прямых, построенных на чертеже 8.

71. 1) Известно, что при $x=4$ линейная функция $y=3x+b$ принимает значение, равное 11. Найти b.

2) Известно, что график функции $y=ax+5$ проходит через точку $M(4;\ 13)$. Найти a.

72. Найти абсциссы точек пересечения с осью x графиков функций:

$$1)\ y=2x-6; \qquad 2)\ y=3x+3;$$
$$3)\ y=2x-1; \qquad 4)\ y=2x-3.$$

73. Найти ординаты точек пересечения с осью y графиков функций:

$$1)\ y=x-5; \qquad 2)\ y=2x+3;$$
$$3)\ y=-4x+7; \qquad 4)\ y=-0{,}5x-2{,}5.$$

74. 1) График функции $y=2x+b$ пересекает ось ординат в точке $(0;\ 5)$. Найти значение b и построить график функции.

2) График функции $y=kx+b$ проходит через точку $M(2;\ 3)$ и через точку $N(-5;\ -4)$. Найти значение k и b и построить график функции.

75. При определении опытным путём скорости звука v *м* в сек. в сухом воздухе при различных температурах получена следующая таблица:

t в градусах	-30	-16	-8	-4	0	4	8	12	20	30
v *м* в сек.	313	323	327	330	332	334	337	339	344	349

1) Начертить график зависимости v от t;

2) заменить этот график приближённо прямой линией;

3) составить приближённую линейную формулу зависимости v от t, найдя угловой коэффициент и начальную ординату по измерению на чертеже (по масштабу).

76. 1) Даны две функции: $y_1 = 3x - 2$ и $y_2 = 2x + 3$.

Найти, при каком значении x обе функции имеют одно и то же числовое значение. Решить графически и вычислением.

2) К уравнению $x + y = 3$ присоединить второе уравнение так, чтобы полученная система уравнений имела множество решений.

3) К уравнению $2x - y = 1$ присоединить второе уравнение так, чтобы полученная система уравнений не имела решений.

4) К уравнению $3x + 2y = 12$ присоединить второе уравнение так, чтобы полученная система уравнений имела единственное решение.

Исследовать системы уравнений и дать графическое истолкование их решения:

77. 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + 4y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ x + 2y = -2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 4 - y, \\ 2y = 8 - 2x; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2y - 5 = -2x; \end{cases}$ 8 $\begin{cases} x - 4 = y, \\ 2x - 2y = 5. \end{cases}$

ГЛАВА II.

СТЕПЕНИ И КОРНИ.

§ 7. Возведение чисел в квадрат и извлечение квадратного корня из положительного числа.

78. (Устно.) 1) Найти площадь квадрата, сторона которого равна 6 *см*; 15 *м*; 200 *м*.

2) Вычислить:

$$12^2;\ (-18)^2;\ 22^2;\ 42^2;$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^2;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(2\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(-3\frac{1}{4}\right)^2;$$
$$(0{,}1)^2;\ (-0{,}3)^2;\ (0{,}5)^2;\ (-1{,}2)^2;$$
$$-1{,}5^2;\ -(-0{,}2)^2;\ \left(-4\frac{1}{2}\right)^2;\ -(-0{,}02)^2.$$

79. Применяя формулы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ и $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, вычислить:

1) $31^2;\ 51^2;\ 81^2;\ 42^2;\ 72^2;$ 2) $19^2;\ 29^2;\ 39^2;\ 89^2;\ 98^2;$

3) $47^2-23^2;\ 84^2-46^2;\ \left(5\frac{1}{6}\right)^2-\left(1\frac{1}{6}\right)^2.$

80. 1) Доказать тождество:

$$(10a+5)^2=100a(a+1)+25.$$

2) Проверить справедливость этого тождества при $a=4$.

3) Сформулировать правило возведения в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5.

4) Вычислить устно: $45^2;\ 35^2;\ 55^2;\ 65^2;\ 75^2;\ 85^2;\ 95^2;\ 105^2.$

81. 1) Доказать тождество:

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=a(a+1)+\frac{1}{4}.$$

2) Проверить справедливость этого тождества при $a=2$; $a=3$; $a=4$.

3) Сформулировать правило для устного возведения в квадрат чисел вида: $a+\frac{1}{2}$, где a — целое число.

4) Вычислить устно квадраты следующих чисел, применяя данную формулу:

$$\left(6\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(7\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(8\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(10\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(20\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(50\frac{1}{2}\right)^2.$$

82. Найти по таблице[1]) квадраты чисел:

1) 56^2; 78^2; 159^2; 574^2; 893^2;
2) $8{,}4^2$; $12{,}3^2$; $49{,}6^2$; $0{,}58^2$; $0{,}0238^2$;
3) $15{,}42^2$; $783{,}4^2$; $257{,}8^2$; $894{,}7^2$; $0{,}4573^2$.

83. 1) Построить график функции $y = x^2$, заполнив следующую таблицу (черт. 9):

x	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$
y															

2) Найти по графику значения y при:

$$x = 2{,}2;\quad x = -1{,}7;\quad x = 1{,}8.$$

3) Найти по графику значения x при:

$$y = 3;\ y = 5;\ y = 7.$$

84. (Устно.) 1) Площадь квадрата равна 625 *кв. см*. Найти длину стороны квадрата.

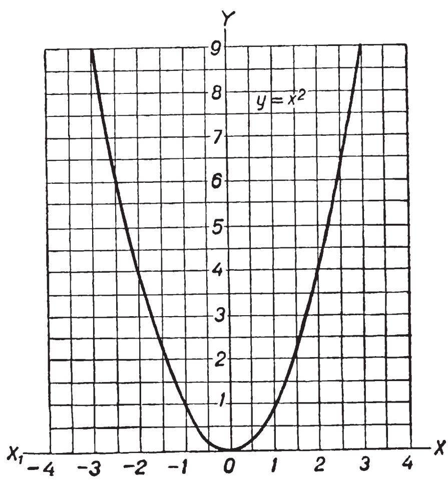
2) Вычислить:

$\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{64}$;

$\sqrt{144}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{576}$;

$\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{\frac{49}{64}}$; $\sqrt{\frac{9}{121}}$;

$\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{0{,}81}$.



Черт. 9.

[1]) В. М. Брадис, Четырёхзначные математические таблицы, Учпедгиз, 1949 и более поздних лет.

85. Извлечь квадратный корень из чисел:

1) 841; 2) 784; 3) 1225;
4) 1849; 5) 7921; 6) 5329;
7) 4624; 8) 2401; 9) 3136;
10) 7225; 11) 57600; 12) 32400;
13) 14400; 14) 28900; 15) 54756;
16) 17424; 17) 56169; 18) 42849;
19) 94864; 20) 64009; 21) 831744;
22) 687241; 23) 259081; 24) 879844;
25) 725904; 26) 488601; 27) 501264;
28) 700569; 29) 632025; 30) 613089;
31) 22562500; 32) 5616900; 33) 3587236;
34) 2105401; 35) 3426201; 36) 2934369.

86. Извлечь квадратный корень из чисел:

1) $\frac{64}{81}$; 2) $\frac{121}{324}$; 3) $\frac{256}{729}$; 4) $\frac{361}{1849}$; 5) $2\frac{7}{9}$;

6) $5\frac{1}{16}$; 7) $552\frac{1}{4}$; 8) $25\frac{161}{256}$; 9) 0,9801;

10) 0,0625; 11) 0,0484; 12) 0,8649;
13) 0,2116; 14) 0,3364; 15) 0,003969;
16) 0,002401; 17) 0,00001225; 18) 0,00005329;
19) 2,3716; 20) 2,7889; 21) 15,0544;
22) 19,0969; 23) 83,1744; 24) 19,9809.

87. а) Извлечь квадратный корень из следующих чисел с точностью до 1; до 0,1:

1) 15; 2) 45; 3) 152; 4) 1000; 5) 2340;
6) 15,82; 7) 48,27; 8) 95,3; 9) 10,9; 10) 2,24.

б) Найти с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{6}$; 5) $\sqrt{8}$;

6) $\sqrt{10}$; 7) $\sqrt{12}$; 8) $\sqrt{15}$; 9) $\sqrt{6,4}$; 10) $\sqrt{3\frac{1}{2}}$.

88. Из следующих чисел извлечь квадратный корень при помощи таблиц[1]):

1) 676; 1089; 2025; 5776; 8649; 9604;

2) $5\frac{31}{225}$; 2,89; 30,25; 47,61; 62,41.

89. Пользуясь таблицами квадратных корней, извлечь из следующих чисел квадратный корень с точностью:

а) до 0,1; б) до 0,01; в) до 0,001;

1) 2; 3; 10; 15; 20; 40; 82; 96; 115; 230; 542;
2) 1,3; 0,4; 0,9; 2,4; 6,8; 0,61; 2,72; 0,247; 0,5276;
3) 893500; 0,002348; 0,000157.

---

[1]) В. М. Брадис, Четырёхзначные математические таблицы, Учпедгиз, 1949 и более поздних лет.

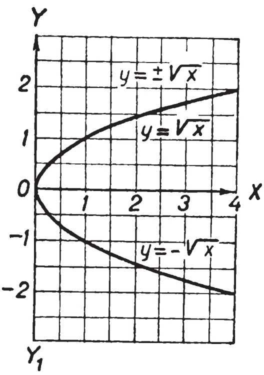
90. 1) Найти по таблицам квадратных корней с точностью до 0,1 значения $y = \pm\sqrt{x}$ при следующих значениях x:

x	0	0,5	0,8	1	1,5	1,69	2	2,25	2,89	3	4	5	6
$y = \pm\sqrt{x}$													

2) Приняв значения x и y за координаты точек в прямоугольной системе координат, построить эти точки и соединить их плавной кривой так, как это показано на чертеже 10.

3) Найти по вычерченному графику значения y, соответствующие следующим значениям x:

$$x = 0{,}2; \quad x = 1{,}2; \quad x = 2{,}5;$$
$$x = 3{,}24; \quad x = 3{,}6.$$

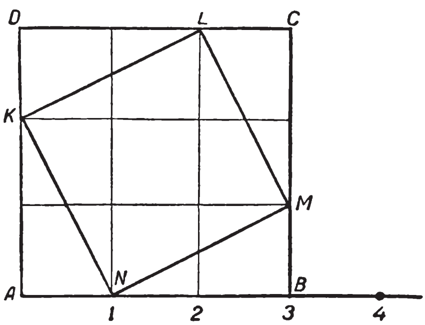


Черт. 10.

91. На числовой оси отложен отрезок AB, равный трём единицам длины, и на этом отрезке построен квадрат $ABCD$. Внутри этого квадрата построен квадрат $KLMN$ (черт. 11).

1) Доказать, что площадь квадрата $KLMN$ равна пяти квадратным единицам.

2) Отложить на числовой прямой AB от точки A отрезок, равный KL.



Черт. 11.

3) Доказать, что длину отрезка KL при данной единице измерения нельзя выразить никаким рациональным числом.

4) Вычислить приближённые значения длины отрезка KL с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 по недостатку и по избытку и записать с помощью неравенств, что эта длина заключена между соответствующими приближениями $2 < \sqrt{5} < 3$ и т. д.

5) Как называются числа, выражающие длины отрезков, несоизмеримых с отрезком, принятым за единицу измерения?

6) Как называются числа, выражающие длины отрезков, соизмеримых с отрезком, принятым за единицу измерения?

92. 1) Длина отрезка выражается числом 2,236067977... *см*. Найти приближённые значения длины этого отрезка с недостатком и с избытком с точностью до 0,01; 0,001; 0,0001.

2) Иррациональное число, выражающее отношение длины окружности к своему диаметру, обозначается буквой π, причём $\pi = 3{,}1415926535\ldots$.

Записать приближённое значение π с точностью до 0,0001 по недостатку и по избытку.

3) Вычислить пять первых десятичных знаков после запятой числа $\sqrt{0{,}5}$.

4) Записать в виде бесконечных периодических десятичных дробей следующие рациональные числа: $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7}$; 1,4; 2; 0; $\frac{5}{6}$.

93. Сравнить по величине следующие числа и заменить букву „и“ знаком $>$ или $<$:

1) 15,4 и 15,368; 2) 0,13762... и 0,13567...; 3) 5,368971... и 5,369; 4) 7,8934597... и 7,8934600...; 5) 0,001001001... и 0,001000100001...; 6) 0,5 и $-1{,}555555\ldots$; 7) 2,535353... и 2,535456...; 8) 3,1415926535... и $\sqrt{10}$; 9) $\sqrt{29}$ и $5\frac{5}{13}$; 10) 1,7356 и $\sqrt{3}$.

94. 1) Составить таблицу сумм приближённых значений $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, вычисленных с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001 и т. д. по недостатку и по избытку. Пользуясь определением суммы иррациональных чисел, найти пять десятичных знаков бесконечной десятичной дроби, выражающей $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

2) Найти первые пять десятичных знаков бесконечных десятичных дробей, выражающих результаты следующих действий:

$$3{,}1415926535\ldots + \frac{1}{3};\quad 1{,}212212221\ldots + \sqrt{7};$$

$$4 \cdot 0{,}1542763\ldots;\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}.$$

95. 1) Дать описание постепенного расширения понятия числа от натуральных чисел до вещественных чисел, руководствуясь следующей таблицей:

Множество чисел	Натуральные числа ↓	Положительные числа ↓	Рациональные числа ↓
Расширение понятия числа	Дробные числа ↓	Отрицательные числа ↓	Иррациональные числа ↓
Обобщение понятия числа	Положительные рациональные числа	Рациональные числа [1]	Вещественные числа

[1]) К рациональным числам относится и число 0.

2) Какие из шести действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня) выполнимы в множестве всех положительных чисел; рациональных чисел; вещественных чисел?

3) Если a и b — натуральные числа, то в множестве каких чисел всегда разрешимо каждое из следующих уравнений:

$$ax = b; \ \frac{x}{a} = b; \ x + a = b; \ x - a = b; \ ax^2 = b?$$

4) Если a и b — любые рациональные числа, то всегда ли разрешимо в множестве вещественных чисел уравнение $ax^2 = b$?

96. Дать обоснованные ответы на следующие вопросы и привести соответствующие примеры:

1) Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

2) Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

3) Может ли быть рациональным число, обратное данному иррациональному числу?

97. Дать ответы на следующие вопросы и привести соответствующие примеры:

1) Справедливо ли утверждение, что всякая бесконечная десятичная дробь выражает иррациональное число?

Дать правильную формулировку указанного суждения.

2) Справедливы ли следующие утверждения:

Всякому рациональному числу соответствует на числовой оси одна и только одна точка.

Всякой точке числовой оси соответствует определённое рациональное число.

3) Какие числа необходимо добавить к множеству рациональных чисел, чтобы всякой точке числовой оси соответствовало определённое число?

4) Как понимать следующее утверждение: „Между множеством всех вещественных чисел и множеством всех точек числовой оси можно установить взаимно однозначное соответствие“?

98. Решить уравнения:

1) $x^2 - 36 = 0$;	2) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$;
3) $2x^2 = 50$;	4) $3x^2 - 27 = 0$;
5) $9x^2 = 16$;	6) $4x^2 - 25 = 0$;
7) $\frac{5x^2}{6} = \frac{6}{245}$;	8) $\frac{3x^2}{4} = \frac{4}{75}$;
9) $x^2 - 12 = 4$;	10) $x^2 - 20 = 16$;
11) $2x^2 - 35 = 15$;	12) $3x^2 + 20 = 95$;

13) $5x^2+42=62$; 14) $\frac{1}{2}x^2+20=38$;

15) $9x^2-325=-4x^2$; 16) $13x^2-19=7x^2+5$;

17) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$;

18) $(9-x)(7+x)+(7-x)(9+x)=76$;

19) $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3}$; 20) $\frac{x-2}{3x+14}=\frac{3(8-x)}{28-x}$.

Следующие задачи решить с помощью составления уравнения:

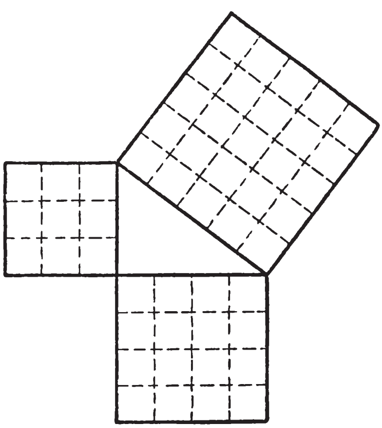
99. Площадь круга вычисляется по формуле $Q=\pi R^2$, где Q — площадь круга, R — радиус круга, π — постоянное число, приближённое значение которого равно 3,14 с точностью до 0,01. Найти радиус круга, если его площадь равна: 1) 5 *м*²; 2) 12 *см*²; 3) 2,5 *дм*².

100. Вычислить с точностью до 1 сек. время падения тела с высоты 300 *м*, пользуясь формулой $s=\frac{gt^2}{2}$, где s — высота падения тела в метрах, $g\approx 9{,}8\ \frac{м}{сек^2}$ — ускорение силы тяжести, t — время падения в секундах.

101. Дальность горизонта на море определяется по формуле $d=4{,}1\sqrt{h}$, где d — дальность горизонта в километрах, h — высота глаза наблюдателя над уровнем моря в метрах.

Вычислить с точностью до 1 *км* дальность горизонта, если:

1) $h=15$ *м*; 2) $h=250$ *м*.



Черт. 12.

102*. Теорема Пифагора утверждает: „Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах"; короче теорема читается так: „Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов" (черт. 12).

Эта теорема позволяет по двум данным сторонам прямоугольного треугольника вычислить третью его сторону.

Вычислить гипотенузу треугольника, катеты которого:

1) 3 *см* и 4 *см*; 2) 12 *см* и 35 *см*;

3) 56 *см* и 33 *см*; 4) 40 *см* и 9 *см*.

103*. Вычислить катет прямоугольного треугольника, если гипотенуза и другой катет соответственно равны:

1) 125 *см* и 100 *см*; 2) 65 *см* и 56 *см*;
3) 25 *см* и 20 *см*; 4) 25 *см* и 24 *см*.

104*. 1) Стороны прямоугольника равны 60 *см* и 91 *см*. Вычислить его диагональ.

2) Сторона квадрата равна 15 *см*. Вычислить его диагональ (с точностью до 0,1 *см*).

3) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17 *см*, а основание 16 *см*. Вычислить высоту треугольника.

4) Сторона равностороннего треугольника равна 4 *см*. Вычислить его высоту (с точностью до 0,1 *см*).

§ 8. Возведение в степень с целым положительным показателем.

105. (Устно.) Выполнить действия:

1) $(-2)^3$; $(-2)^4$; $(-1)^6$; $(-1)^3$.
2) $(-1)^{2n}$; $(-1)^{2n+1}$; $-(-1)^{2n}$; $-(-1)^{2n+1}$.
3) $(-5)^3+(+4)^2-(-7)^3$; $(-1)^{12}-(-2)^5-(-3)^4$.
4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^4$; $\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{2}{5}\right)^3$.
5) $(0{,}1)^2$; $(-0{,}2)^2$; $(-0{,}1)^3$; $(-0{,}2)^3$.
6) $(-0{,}02)^2$; $0{,}12^2$; $(-0{,}05)^3$; $(-0{,}01)^5$.

106. (Устно.) Вычислить:

1) x^2; $-x^2$; $(-x)^2$ при $x=3$; $x=-3$;
2) x^3; $-x^3$; $(-x)^3$ при $x=4$; $x=-4$;
3) $2x^5-3x^4+5x^3-x^2+x+1$ при $x=-1$;
4) $3x^4-2x^3-5x^2+4x-2$ при $x=-\frac{1}{2}$.

107. Написать числа, которые получатся при подстановке $x=10$ в следующие выражения:

1) $5x^2+2x+1$; 2) $8x^3+6x^2+3x+2$;
3) $6x^4+8x^3+4x^2+9x+5$; 4) $3x^4+7x^2+1$.

108. Записать с помощью степеней десяти следующие числа:

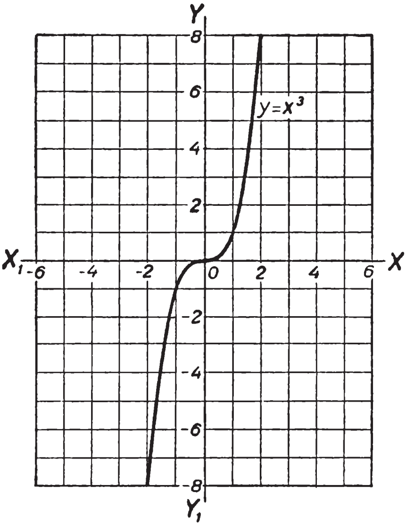
1) 583; 2) 8372; 3) 15 496; 4) 100 000;
5) 6 000 000; 6) 12 000 000 000.

109. Составить общее выражение по десятичной системе: 1) двузначного числа; 2) трёхзначного числа; 3) любого числа натурального ряда.

110. Вычертить графики: 1) $y = x^3$ (черт. 13); 2) $y = -x^3$.

111. При каких значениях x:

1) $x^2 > x$; 2) $x^2 = x$; 3) $x^2 < x$;
4) $x^3 > x$; 5) $x^3 = x$; 6) $x^3 < x$;
7) $x^3 > x^2$; 8) $x^3 = x^2$; 9) $x^3 < x^2$?



Черт. 13.

112. (Устно.) Вычислить двумя способами:

$(2 \cdot 3)^2$; $(2 \cdot 5)^3$; $(2^3)^2$;
$(3^2)^3$; $[(-4)^2]^2$; $[-(-2)^3]^2$.

Выполнить действия:

113. (Устно.)

1) $(-3a^2b)^2$; $(-0{,}5m^3n^2)^3$; $(-0{,}2x^2y^3z)^4$; $\left(\frac{2}{3}p^5q^4r^3\right)^3$;

2) $(x^m)^3$; $(-a^n)^4$; $(a^kb^2)^3$; $\left(\frac{1}{2}m^2n^k\right)^5$;

3) $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^n$; $(-3a^3b^2)^{2n}$; $(a^xb^y)^m$;

4) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^4$; $\left(\frac{m^3}{n^2}\right)^2$; $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^5$; $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^n$.

114. 1) $\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{5c}{6a}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b}{3d}\right)^2$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{5a^3}{3b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{7a^2}{5b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b^4}{a^5}\right)^7$.

115. 1) $\left[\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{c^2}{b^3d}\right)^3\right]$;

2) $\left[\left(\frac{mnp}{a^2b}\right)^4 : \left(\frac{m^2n^2}{a^3b^2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{a^3b^4c}{mp^3}\right)^6 : \left(\frac{a^5b^8c^2}{m^2p^5}\right)^3\right]$.

116. 1) $(-2a)^6 - (-8a^3)^2 - [-(2a)^2]^3 - [2(-a)^3]^2$;

2) $(-2a)^{10} - (-13a^5)^2 - [-(2a)^2]^5 - [2(-a)^5]^2$.

117. 1) $\left[\frac{2a^m(p-q)^n}{b^n(p+q)^m}\right]^3$; 2) $\left[\frac{3a^{2m}(x+y)^n}{4b^n(x-y)^m}\right]^4$.

118. 1) (Устно.) $(a+x)^2$; 2) (Устно.) $(2a-3b)^2$; 3) $(2a^n - 3b^m)^2$;

4) $\left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right)^2$; 5) $\left(2a^{3x} + \frac{x}{4a^{2x-1}}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3a^{m-1}}{8} - \frac{5a^{n+1}}{9}\right)^2$.

119. 1) $(x+y+z)^2$; 2) $(2x-3y+1)^2$;
3) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c\right)^2$.

120. 1) $(2ax^3+3a^2x^2-4a^3x)^2$; 2) $(2a^n-3a^{n-1}+a^{n-2})^2$;
3) $(1+2a-3b+4c)^2$; 4) $(2-3x-4x^2+5x^3)^2$;
5) $\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}\right)^2$; 6) $\left(a^2-a-2+\frac{1}{a}\right)^2$.

121. 1) $(a+b)^4$; 2) $(a-b)^4$; 3) $(2-3b)^4$; 4) $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^4$.

122. 1) $(5a-3b)^3$; 2) $(2a+3b)^3$;
3)* $(a+b+c)^3$; 4)* $(1+2x-x^2)^3$; 5)* $(x-2)^6$.

123*. Доказать справедливость тождеств:

1) $(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2=$
$=4(a^2+b^2+c^2)$;

2) $(a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3=$
$=24abc$.

§ 9. Отрицательный и нулевой показатели степени.

Вычислить:

124. (Устно.) 1) 2^{-2}; 3^{-2}; 2^{-3}; 8^{-1}.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $\left(\frac{5}{6}\right)^{-4}$; $(0,3)^{-3}$.

3) $(-8)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{12}\right)^{-1}$; $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $(-1)^{-6}$.

4) $(-156)^0$; $\left(\frac{4}{9}\right)^0$; $(-0,15)^0$; $(1,5)^0$.

5) -5^{-1}; -10^{-2}; -5^{-3}; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

6) $-0,25^{-1}$; $8\cdot 4^{-2}$; $25\cdot 5^{-3}$; $32\cdot 4^{-4}$.

125. 1) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 3) $5^{-5}\cdot(0,1)^{-4}$;

4) $\left[5-3\cdot\left(\frac{4}{15}\right)^0\right]^{-2}$.

126. 1) $\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}$; 2) $\frac{5^2\cdot 5^{-1}-8^0}{2^{-2}}$;

3) $\frac{4^{-1}-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$; 4) $\frac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^0}$.

127. Построить графики следующих функций:

$$1)\ y=x^0;\quad 2)\ y=x^{-1};\quad 3)\ y=2x^{-1}.$$

Представить следующие дроби в виде целых выражений, вводя отрицательные показатели степеней:

128. (Устно.) 1) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{625}$.

2) 0,01; 0,0001; 0,000001; 0,000000001.

3) $\frac{5}{128}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{8}{243}$; $5\frac{3}{32}$.

4) 0,00015; 0,0000023; 0,00000124; 2,000003.

5) $\frac{1}{x^2}$; $\frac{2}{x^5}$; $\frac{a^2}{b^3}$; $\frac{x^3}{y^2}$. 6) $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^n}$; $\frac{x^3}{y^5}$; $\frac{a^n}{b^m}$.

129. 1) $\frac{2n}{3m^2}$; 2) $4x\cdot\frac{1}{y^6}$; 3) $\frac{2}{(a+b)^2}$; 4) $\frac{5xy}{2(x-y)^4}$.

130. 1) $\frac{a+b}{a-b}$; 2) $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; 3) $\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$; 4) $\frac{\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{y^4}\right)^3}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^4}\right)^4}$.

Представить следующие дроби в виде целых выражений:

131. 1) $\frac{ab}{c^{-2}}$; 2) $\frac{5x^2}{a^{-3}}$; 3) $\frac{a^2b^{-3}}{cd^{-1}}$; 4) $\frac{1}{2a^{-3}b^{-1}c^2}$.

132. 1) $\frac{5}{(a-b)^{-2}}$; 2) $\frac{3xy}{7(x-y)^{-3}}$; 3) $\frac{2^{-1}(x+y)}{5^{-1}a^{-2}(x-y)^{-2}}$.

133. 1) $\frac{1}{a^{-n}b^{-m}}$; 2) $\frac{9}{5^{-1}x^3y^{-k}z^{-1}}$; 3) $\frac{5a}{3^{-4}(a-b)^{-n}(a+b)^m}$.

Преобразовать следующие выражения так, чтобы они не содержали отрицательных показателей степеней:

134. 1) $\frac{2a^{-3}}{b^{-1}}$; 2) $\frac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}}$; 3) $\frac{4a^{-2}b^{-1}}{5x^{-2}y}$; 4) $\frac{m^{-1}n^2}{a^{-3}b}$.

135. 1) $\frac{3(a-b)^{-2}}{4^{-1}(a+b)^{-1}}$; 2) $\left(\frac{x+y}{x-1}\right)^{-1}$; 3) $\frac{5a(a-b)^{-4}}{b^{-2}(x-y)^{-2}}$.

Выполнить действия:

136. (Устно.) 1) $a^3\cdot a^{-2}$; $x^4\cdot x^{-1}$; $a^5:a^{-1}$; $a^{-3}:a^{-2}$.

2) $5a^{-5}\cdot 4a^4$; $\frac{3}{2}ab^{-3}\cdot 6a^{-2}b$; $\frac{3}{4}m^{-2}n^4\cdot 8m^3n^{-2}$.

3) $6c^2d^4:3c^{-1}d^{-2}$; $\frac{1}{2}p^{-1}q^{-3}:\frac{3}{8}p^{-2}q^{-4}$.

4) $5a^n:\frac{1}{3}a^{-n}$; $0{,}8x^{-1}:0{,}4x^{n\ 1}$.

137. 1) $(x^{-4}-x^2+x^{-1}):x^{-1}$;
2) $(ax^2+bx)\cdot x^{-2}$; 3) $(ax^{-3}-bx^{-1}):x^{-4}$,
4) $(a^{-4}+a^{-2}b^{-1}+ab^{-2}-a^0b^{-3})\cdot a^4b^{-4}$.

138. 1) $(2x+3x^{-1})(3x-2x^{-1})$;
2) $(3m-2n^{-1})(4m^3-5n^{-2})$;
3) $(a^{-2}+a^{-1}+1)(a^{-2}+a)$;
4) $(3p^{-2}-2p^{-1}-p^0)(-4p^2+p^{-1})$.

139. 1) $(x^2-y^2):(x^{-1}+y^{-1})$;
2) $(x^{-3}+x^{-2}-x^0-x):(x^{-2}+x^{-1}+x^0)$;
3) $(6a^2-10a-6+4a^{-1}):(3a+1-a^{-1})$;
4) $(8m-22+31m^{-1}-20m^{-2}):(2m-3+4m^{-1})$.

140. 1) $(-a^2)^{-3}$; $(-1)^{2n}$; $(-1)^{2n-1}$;
2) $\left(\frac{3x^{-1}}{5a^{-2}}\right)^{-1}$; $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$;
3) $\left[\left(-\frac{m}{n}\right)^{-3}\right]^{-1}$; 4) $\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2}$.

141. 1) $(a^{-2}+b^{-1})^2$; 2) $(x^{-2}+a^{-3})(x^{-2}-a^{-3})$;
3) $[m-(1-m)^{-1}]\cdot\dfrac{m(m-2)+m^0}{\frac{1}{m^{-2}}-m+1}$;
4) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^3(a^2-2ab+b^2)^{-2}$.

142. Упростить выражение:

$$\left(1+\frac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}-y^{-n}}\right)^{-2},$$

и найти его числовое значение при $x=3$; $y=0,75$; $n=1$.

143. Упростить выражение:

$$\frac{[1,5(a-1)]^{-1}}{[3(a-b)]^{-2}}:\left[1+a^{-1}-2b^{-1}+\frac{(1-b^{-1})^2}{a^{-1}-1}\right],$$

и найти его числовое значение при $a=-4$, $b=-\frac{1}{2}$.

§ 10. Понятие об извлечении корня n-ой степени (n — натуральное число).

144. (Устно.) 1) Найти сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 20 *м* и 80 *м*.

2) Найти ребро куба, объём которого равен: 125 *см*^{3}; 8 *м*^{3}; 64 *дм*^{3}; 216 *см*^{3}.

145. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[5]{-32}$;

2) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{0,008}$; $\sqrt[3]{-0,064}$; $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$.

146. Найти значение следующих корней:

1) $\sqrt{4}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt{\frac{9}{25}}$;

2) $\sqrt[4]{0,0016}$; $\sqrt{0,25}$; $\sqrt[6]{64}$.

147. Указать, какие из следующих выражений не имеют смысла:

1) $\sqrt{-9}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[4]{-16}$;

2) $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt{-1}$; $\sqrt[3]{0}$; $\sqrt{0,01}$;

3) $\sqrt[3]{-0,001}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{-0,25}$; $\sqrt[4]{-0,0016}$.

148. Найти допустимые значения x в следующих выражениях:

1) $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x-5}$; $\sqrt[4]{2x-6}$;

2) $\sqrt[6]{1-x}$; $\sqrt[4]{3-3x}$; $\sqrt{x-y}$.

149. 1) Показать, что сумма $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ имеет 4 различных значения (рассматриваются два различных значения каждого корня).

2) Показать, что сумма арифметических корней $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ имеет единственное значение, равное 5.

150. Найти арифметический корень:

1) $\sqrt{25}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{64}$;

2) $\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt[4]{(-3)^4}$; $\sqrt[4]{(-5)^4}$; $\sqrt[3]{125}$;

3) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$; $\sqrt{(5-2)^2}$;

4) $\sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3}$; $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4}$.

Вычислить:

151. 1) $\sqrt{(5-a)^2}$ при $a \leqslant 5$;

2) $\sqrt{(5-a)^2}$ при $a \geqslant 5$;

3) $\sqrt[4]{(x-3)^4}$ при $x \geqslant 3$;

4) $\sqrt[4]{(x-3)^4}$ при $x \leqslant 3$.

152. 1) $\sqrt{(x-y)^2}$ при $x < y$;

2) $\sqrt[4]{(a-b)^4}$ при $a > b$; при $a < b$;

3) $\sqrt[6]{(m-n)^6}$ при $m<n$; при $m>n$;

4) $\sqrt[5]{(a-b)^5}$ при $a>b$; при $a<b$;

5) Показать, что $\sqrt{a^2}=|a|$ при любом a.

153. 1) Даны два произвольных числа m и n, причём $n>m$. Найти ошибку в следующих преобразованиях:

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2;\ (m-n)^2=(n-m)^2;$$
$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2};\ m-n=n-m;\ 2m=2n;\ m=n,$$

т. е. два произвольных числа равны между собой.

2) Вычисляя числовое значение выражения $a+\sqrt{1-2a+a^2}$ при $a=5$, учащиеся получили различные ответы. Одни из них вычисляли так:

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1.$$

Другие, подставив вместо a его значение, равное 5, получили:

$$5+\sqrt{1-10+25}=5+4=9.$$

Какой из этих ответов правильный и где ошибка?

154. Доказать, что

$$1)\ 2a+\sqrt{(a-3)^2}=\begin{cases}3a-3, & \text{если } a>3;\\ a+3, & \text{если } a<3;\end{cases}$$

$$2)\ m+n+\sqrt{(m-n)^2}=\begin{cases}2m, & \text{если } m>n;\\ 2n, & \text{если } m<n.\end{cases}$$

155. Найти ошибку в доказательстве софизма: $2\cdot 2=5$(!?). Возьмём равенство:

$$16-36=25-45.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства по $20\frac{1}{4}$, получим:

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4}.$$

Отсюда:

$$4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

Или:

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства, получим:

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}.$$

Отсюда: $4=5$, или: $2\cdot 2=5$ (!?)

156. В следующих примерах заменить корень нечётной степени из отрицательного числа корнем той же степени из положительного числа (арифметический корень), применяя формулу: $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$, где $a>0$, n — натуральное число.

1) $\sqrt[3]{-5}$; $\sqrt[5]{-3}$; $\sqrt[15]{-8}$; $\sqrt[3]{-27}$;

2) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$; $\sqrt[5]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; $\sqrt[3]{4-\sqrt{26}}$;

3) $\sqrt[3]{-2a}$, где $a>0$; $\sqrt[3]{1-x}$, где $x>1$;

4) $\sqrt[5]{a-b}$, где $a<b$; $\sqrt[3]{(2-a)^3}$, при $a>2$.

§ 11. Извлечение корня из одночленов[1]).

№ 157—159 устно.

157. Извлечь корень из произведения:

1) $\sqrt{4\cdot 9}$; $\sqrt{25\cdot 64}$; $\sqrt{100\cdot 4}$; $\sqrt{81\cdot 36}$;

2) $\sqrt{16\cdot 25\cdot 9}$; $\sqrt{49\cdot 36\cdot 100}$; $\sqrt{64\cdot 81\cdot 25}$; $\sqrt{144\cdot 100\cdot 4}$;

3) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; $\sqrt[3]{64\cdot 125}$; $\sqrt[3]{216\cdot 512}$; $\sqrt[3]{27\cdot 125\cdot 8}$;

4) $\sqrt[3]{64\cdot 27\cdot 125}$; $\sqrt[3]{343\cdot 512\cdot 8}$; $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; $\sqrt[5]{32\cdot 243}$.

158. Извлечь корень из дроби:

1) $\sqrt{\frac{49}{36}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$;

2) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

159. Извлечь корень из степени:

1) $\sqrt{3^4}$; $\sqrt{2^6}$; $\sqrt{5^4}$; $\sqrt{6^8}$;

2) $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{5^3}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}$; $\sqrt[4]{3^8}$;

3) $\sqrt{x^4}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[5]{m^{10}}$; $\sqrt[6]{y^{12}}$;

4) $\sqrt{a^{2n}}$; $\sqrt[3]{x^{6n}}$; $\sqrt[n]{a^{3n}}$; $\sqrt[k]{m^{5k}}$.

---

[1]) В примерах на радикалы всюду подразумеваются арифметические корни, причём там, где нет особых указаний, ответы даны при условии, что буквы в подрадикальных выражениях обозначают положительные числа и разности вида $a-b$ рассматриваются при $a>b$. Вместе с тем необходимо при выполнении упражнений на радикалы приучать учащихся определять и другие допустимые значения букв и соотношения между ними и в соответствии с результатами этого исследования находить дополнительные ответы.

Выполнить действия:

160. 1) $\sqrt{9a^2}$; $\sqrt[3]{8x^6}$; $\sqrt{\frac{1}{4}x^2y^4}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{27}a^3b^9}$;

2) $\sqrt[4]{a^8b^4c^{12}}$; $\sqrt[3]{-64x^3y^6z^9}$; $\sqrt[5]{-32m^5n^{10}}$;

3) $\sqrt{\frac{4a^2b^4}{25c^2d^6}}$; $\sqrt[3]{-\frac{8a^6b^3c^9}{27x^{12}}}$; $3xy\sqrt[3]{\frac{64a^3b^9}{27x^3y^6}}$.

161. 1) $\sqrt[5]{m^{-10}}$; $\sqrt[3]{-a^{-6}}$; $\sqrt{9a^{-4}}$; $\sqrt[4]{16x^{-8}y^{-4}}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{8a^{-6}}{27b^{-9}}}$; $\sqrt{\frac{9a^{-2}b^4}{25x^{-6}}}$; $\sqrt[3]{\frac{64a^{-12}b^{15}}{125c^{-6}d^{-3}}}$;

3) $\sqrt[-3]{8}$; $\sqrt[-2]{a^4}$; $\sqrt[-5]{\frac{x^{10}}{y^5}}$; $\sqrt[-3]{8a^{-6}b^3}$.

§ 12. Преобразование радикалов.

а) Вынесение множителей из-под знака радикала.

162. (Устно.) Не выполняя извлечение корней, определить, акое из чисел больше:

1) $2\sqrt{5}$ или $\sqrt{45}$; 2) $\sqrt{8}$ или $3\sqrt{2}$;

3) $5\sqrt{7}$ или $\sqrt{63}$; 4) $7\sqrt{2}$ или $\sqrt{72}$;

5) Доказать, что $3\sqrt{2}+2-\sqrt{18}=2$.

Вынести из-под знака радикала множители:

163. (Устно.) 1) $\sqrt{98}$; $\sqrt{54}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{280}$;

2) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{250}$; $\sqrt[3]{72}$;

3) $\sqrt[4]{48}$; $\sqrt[4]{243}$; $\sqrt[5]{96}$; $\sqrt[5]{1215}$;

4) $\sqrt{a^3}$; $\sqrt{9a}$; $\sqrt{2a^2}$; $\sqrt{5a^4}$.

164. (Устно.) 1) $\sqrt[3]{8m^2}$; $\sqrt[3]{5n^3}$; $\sqrt[3]{2x^6}$; $\sqrt[3]{16y^5}$;

2) $\sqrt[4]{a^5}$; $\sqrt[5]{3x^{10}y^7}$; $\sqrt[7]{m^8n}$; $\sqrt[5]{32a^8b^3c^{10}}$;

3) $2\sqrt{9a^2bc^3}$; $\frac{2}{3}\sqrt[3]{27x^4y^2z^5}$;

4) $\frac{3a}{4}\sqrt[4]{16a^5bc^8}$; $\frac{2c}{3}\sqrt[4]{81c^6d^5}$.

165. 1) $\sqrt{\frac{a^2b}{9}}$; $\sqrt[3]{\frac{x^6y}{a^3b^9}}$; 2) $m^2\sqrt{\frac{25n^3}{36m^4}}$; $\frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{27x^6y^5}{125a^9b^6}}$;

3) $\sqrt[n]{a^{2n}b^{3n}}$; $x\sqrt[n]{x^{n+1}}$; 4) $a\sqrt[m]{\frac{a^{n+2}}{b^{m+1}}}$; $\sqrt[n]{3x^{2n+1}}$.

166. При каких допустимых значениях m и n справедливы следующие равенства:

$$1)\ \sqrt{mn}=\sqrt{m}\cdot\sqrt{n};\quad 2)\ \sqrt{\frac{m}{n}}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}};$$

$$3)\ \sqrt{m^2n}=m\sqrt{n};\quad 4)\ \sqrt{m^2n}=-m\sqrt{n}?$$

Привести числовые примеры для каждого случая.

167. Вынести множители из-под знака радикала:

$$1)\ \sqrt{5(1-\sqrt{2})^2};\quad 2)\ \sqrt{27(2-\sqrt{5})^2};$$

$$3)\ \sqrt{\frac{2}{(3-\sqrt{10})^2}};\ 4)\ \sqrt{\frac{5(1-\sqrt{3})^2}{4}}.$$

168. В следующих примерах вынести множители из-под знака радикала, учитывая указанные ограничения на допустимые значения букв:

1) $\sqrt{(a-1)^3}$ при $a\geqslant 1$;

2) $\sqrt{a^5(b-3)^2}$ при $a>0,\ b\geqslant 3$;

3) $\sqrt[4]{x^7(a-2)^5}$ при $x>0,\ a\geqslant 2$;

4) $\sqrt{a^3(3-a)^2}$ при $0<a\leqslant 3$.

В следующих примерах вынести множители из-под знака радикала, учитывая допустимые значения букв, входящих в подрадикальные выражения:

169. 1) $\sqrt{(1-a)^3}$; 2) $\sqrt{(x-3)^3}$;

3) $\sqrt{8(a-5)^2}$; 4) $\sqrt{18(a-1)^5}$.

170. 1) $\sqrt[3]{8x(x-2)^4}$; 2) $\sqrt{\frac{5(a-b)^3}{4}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{8(x-3)^4}{27}}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$.

171. 1) $\sqrt{\frac{3(x^2-2xy+y^2)}{4(x^2+2xy+y^2)}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{(a-b)^3}{a^4}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b^3}}$; 4) $\frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{x^3}{a^3}-\frac{x^3}{a^2}}$.

б) Внесение множителей под радикал.

172. (Устно.) Не извлекая корни, определить, которое из чисел больше:

1) $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{5}$ или $4\sqrt{3}$;

3) $2\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[3]{25}$; 4) $2\sqrt[3]{3}$ или $3\sqrt[3]{2}$.

173. Вычислить $12\sqrt{3}$ с точностью до 0,1 двумя способами:
1) найти $\sqrt{3}$ с точностью до 0,1 и результат умножить на 12;
2) внести под радикал множитель 12 и из полученного под рнем числа извлечь корень с точностью до 0,1.
Который результат вернее и почему?

174. При помощи таблиц квадратных корней вычислить с точстью до 0,1:

1) $4\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{15}$; 4) $8\sqrt{5}$.

175. Вычислить с точностью до 0,01:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{10}$; 3) $5\sqrt{6}$; 4) $12\sqrt{7}$.

Внести множители под радикал:

176. (Устно.) 1) $2\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $2\sqrt{7}$.
2) $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{3}$; $5\sqrt[3]{2}$.
3) $2\sqrt{a}$; $a\sqrt{5}$; $x\sqrt[3]{10}$; $a\sqrt[5]{7}$.
4) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}\sqrt{a}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

177. (Устно.) 1) $a\sqrt{a}$; $b\sqrt[3]{b^2}$; $a^2\sqrt{x}$; $a^2\sqrt[3]{x}$.
2) $2m\sqrt{mn}$; $c^2\sqrt{5bc}$; $x^2\sqrt[3]{2ax}$; $2b\sqrt[3]{b^2c^2}$.

178. 1) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$; 2) $2xy\sqrt{\frac{3x}{2y}}$; 3) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; 4) $\frac{x}{y^2}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$.

179. 1) $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a^2-b^2}}$; 2) $\frac{2}{x+y}\sqrt{\frac{3x^2-3y^2}{2}}$;
3) $ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$; 4) $x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}$.

180. 1) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^3-a^4}$; 2) $ab\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^2b^2}}$;
3) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a^2+ab}{a^2-2ab+b^2}}$; 4) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt[3]{\frac{a^2-2ab+b^2}{(a+b)^2}}$.

181. 1) $ab\sqrt[n]{ab}$; 2) $mn^2\sqrt[k]{m^2n}$;
3) $xy\sqrt[n+1]{xy^2}$; 4) $\frac{a}{b}\sqrt[n+1]{\frac{b^{n+2}}{a^{2n}}}$.

182. 1) Доказать следующее равенство при $0<a<1$:

$$(a-1)\sqrt{\frac{3a}{1-a^2}}=-\sqrt{\frac{3a(1-a)}{1+a}}.$$

2) Проверить это равенство при $a=\frac{1}{2}$.

183. Внести множители под знак радикала при заданных значениях букв:

1) $(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}$ при $a>2$;

2) $(x-5)\sqrt{\frac{x}{25-x^2}}$ при $0<x<5$;

3) $(a-b)\sqrt{\frac{3a}{b^2-a^2}}$ при $0<a<b$;

4) $\frac{2}{x-y}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}}$ при $0<x<y$.

в) Сокращение показателя корня и показателя подкоренного выражения.

184. (Устно.) Вычислить:

1) $\sqrt[4]{36^2}$; 2) $\sqrt[6]{49^3}$; 3) $\sqrt[6]{125^2}$; 4) $\sqrt[8]{1,44^4}$.

185. Вычислить с точностью до 0,1:

1) $\sqrt[4]{25}$; 2) $\sqrt[6]{27}$; 3) $\sqrt[8]{16}$; 4) $\sqrt[10]{32}$.

186. Сократить показатели корней и подкоренных выражений:

1) $\sqrt[4]{a^2}$; $\sqrt[8]{x^4}$; $\sqrt[6]{m^3}$; $\sqrt[10]{a^5}$.

2) $\sqrt[6]{b^4}$; $\sqrt[12]{n^4}$; $\sqrt[16]{a^{12}}$; $\sqrt[20]{x^{15}}$.

3) $\sqrt[4]{25x^2y^2}$; $\sqrt[6]{27m^3n^3}$; $\sqrt[6]{9a^4b^6}$; $\sqrt[8]{16x^{12}y^4}$.

4) $\sqrt[4]{\frac{4m^6}{9n^2}}$; $\sqrt[9]{\frac{8a^6b^{12}}{27c^3d^9}}$; $\sqrt[6]{64x^9y^3z^{12}}$; $\sqrt[10]{32a^{15}b^{20}c^5}$;

$\sqrt[16]{a^{4n}b^{8n}}$; $\sqrt[n]{x^{2n}y^{3n}}$.

187. Проверить справедливость следующих равенств, давая буквам числовые значения:

1) $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[4]{|a|^2}=\sqrt{|a|}=\begin{cases}\sqrt{a}, \text{ если } a>0;\\ \sqrt{-a}, \text{ если } a<0.\end{cases}$

2) $\sqrt[2mk]{a^{2m}}=\sqrt[2mk]{|a|^{2m}}=\sqrt[k]{|a|}=\begin{cases}\sqrt[k]{a}, \text{ если } a>0;\\ \sqrt[k]{-a}, \text{ если } a<0.\end{cases}$

188. Сократить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения:

1) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2}$; 2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$;

3) $\sqrt[8]{(2-\sqrt{5})^2}$; 4) $\sqrt[6]{(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}$.

189. Сократить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения при заданных условиях:

1) $\sqrt[4]{(x-1)^2}$ при $x<1$; 2) $\sqrt[6]{(2-x)^2}$ при $x>2$;
3) $\sqrt[4]{(a-2)^2}$ при $a<2$; 4) $\sqrt[8]{(3-x)^4}$ при $x>3$.

г) Освобождение подкоренного выражения от дроби.

190. 1) Вычислить $\sqrt{\frac{5}{6}}$ двумя способами:

а) извлечь корень с точностью до 0,01 отдельно из числителя и из знаменателя и первый результат разделить на второй;

б) освободить подкоренное выражение от дроби и вычислить $\frac{1}{6}\sqrt{30}$, извлекая корень с точностью до 0,01.

Который из этих способов проще и быстрее даёт результат? Выяснить, который из результатов точнее. Для этого представить $\frac{5}{6}$ в виде десятичной дроби (с точностью до 0,0001) и извлечь корень.

2) Выполнить те же вычисления в следующих примерах:

$$\sqrt{5\frac{2}{3}};\quad \sqrt{8\frac{4}{7}}.$$

Освободить подкоренное выражение от дроби:

191. (Устно.) 1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

2) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

3) $\sqrt{1\frac{1}{2}}$; $\sqrt{2\frac{1}{2}}$; $\sqrt{3\frac{1}{3}}$; $\sqrt{2\frac{1}{7}}$.

4) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$.

192. 1) $\sqrt{\frac{5}{12}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$; $\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$.

2) $x\sqrt{\frac{x}{y}}$; $n\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$; $b\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}}$; $y\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}$.

193. 1) $6n\sqrt{\frac{m}{2n}}$; 2) $\frac{4a}{3m}\sqrt[3]{\frac{3m}{2a}}$; 3) $15mn\sqrt[4]{\frac{a^3m}{27m^2n^3}}$.

194. 1) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}$; 2) $(m-n)\sqrt[3]{\frac{m+n}{(m-n)^2}}$;

3) $(x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy}{(x-y)^2}}$; 4) $b\sqrt[5]{\frac{a}{b^3}+\frac{c}{b^2}}$.

195. 1) $a\sqrt[n]{\frac{2}{a^{n-1}}}$; 2) $\sqrt[n]{\frac{a^2b}{(a+b)^{n-2}}}$;

3) $b^2c\sqrt[m]{\frac{ab}{cb^{m-1}}}$; 4) $\frac{y}{x}\sqrt[n]{\frac{xy}{y^2(a-b)^{n-3}}}$.

Привести корни к простейшему виду:

196. 1) $3x^2y\sqrt{\frac{12}{xy}}$; 2) $\frac{5a^2}{7b}\sqrt{\frac{49b^3}{5a}}$;

3) $\frac{3a^3b}{2c}\sqrt{\frac{4c^3}{9a^5b}}$; 4) $\frac{2xy^2}{3ab}\sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$.

197. 1) $2ab\sqrt[3]{\frac{b^2}{8a}}$; 2) $\frac{x^2}{y}\sqrt[3]{\frac{3y}{2x^2}}$;

3) $\sqrt{25m^3-50n^2}$; 4) $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^3}$.

198. 1) $2m\sqrt[4]{\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}}$; 2) $\frac{2a^2}{3b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^5}{a^6}}$;

3) $\frac{5x}{3y^2}\sqrt[3]{\frac{y^5}{x^4}+\frac{y^4}{x^5}}$; 4) $\frac{3b}{4a}\sqrt[5]{\frac{32a^6}{3b^5}-\frac{64a^5}{27b^4}}$.

199. 1) $\frac{x-y}{y}\sqrt[3]{\frac{x^4y^3+x^3y^4}{x^2-2xy+y^2}}$; 2) $\frac{a+1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^4-a^3}{a^2+2a+1}}$;

3) $\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{a}}$;

4) $\frac{x}{x+1}\sqrt[4]{(1+2x+x^2)(2x+2)(x^4-x^2)}$.

200. 1) $\frac{4}{ab}\sqrt[n]{a^{n+1}b^{2n+2}}$; 2) $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{y^{3n+2}}{x^{n-2}}}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt[m+n]{\frac{a(a-b)^{2m+2n}}{(a+b)^{m+n}}}$;

4) $\frac{1}{(ab)^{m+n}}\sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n}-a^{m+2n}b^{2m+n}}$.

201. Доказать, что

1) $x+\sqrt{(x-1)^2}=\begin{cases} 2x-1, & \text{если } x>1; \\ 1, & \text{если } x<1. \end{cases}$

2) $(m-n)\sqrt{\frac{m+n}{(m-n)^2}}=\begin{cases} \sqrt{m+n}, & \text{если } m>n; \\ -\sqrt{m+n}, & \text{если } m<n. \end{cases}$

д) Подобие радикалов.

Доказать подобие корней:

202. 1) (Устно.) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{75}$;

3) $3\sqrt{12}$ и $2\sqrt{48}$; 4) $5\sqrt{63}$ и $4\sqrt{28}$;

5) $\sqrt[3]{24}$ и $\sqrt[3]{81}$; 6) $\sqrt[3]{54}$ и $\sqrt[3]{16}$;

7) $2\sqrt[3]{250}$ и $3\sqrt[3]{128}$; 8) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{108}$ и $\frac{3}{2}\sqrt[3]{32}$.

203. 1) $\sqrt{216}$ и $\sqrt{\frac{3}{8}}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{243}$;

3) $\sqrt{135}$ и $\sqrt{\frac{3}{5}}$; 4) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{84}$.

204. 1) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}$ и $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{72}{343}}$ и $\sqrt[3]{41\frac{2}{3}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$ и $\sqrt[4]{0,1875}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{1}{125}}$ и $\sqrt[4]{\frac{80}{81}}$.

205. 1) $2\sqrt{a^3b^3c}$; $3\sqrt{a^3bc^3}$ и $4\sqrt{ab^3c^3}$;

2) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}$; $\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^7}{b^2}}$ и $\frac{b}{a^2}\sqrt[3]{\frac{a^{10}}{b^5}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}}$ и $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$;

4) $\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$; $\sqrt[5]{ab^4}$ и $\sqrt[5]{\frac{b^4}{a^4}}$.

206. 1) $\sqrt[3]{\frac{x+y}{(x-y)^2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{mn-nq}}$ и $\sqrt{\frac{n^3}{m-q}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{x^5}{(x^2-1)^2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{x^3+x^2}{(x-1)^2}}$; 4) $\sqrt{\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^2}{b^2}}$ и $\sqrt{\frac{ac^2+bc^2}{a-b}}$.

207. 1) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}-1}$ и $\frac{a-b}{b}\sqrt{\frac{1}{ab-b^2}}$;

2) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}}$; $\sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{c^2n^2}}$ и $\sqrt{225m^3}$;

3) $\sqrt{\frac{1}{m}-n}$; $\sqrt{\frac{n^6-mn^7}{mn^2}}$ и $\sqrt{m^3-m^4n}$;

4) $\sqrt{\frac{1}{a^3b^2-a^2b^3}}$; $\sqrt{4a^3b^2-4a^2b^3}$ и

$\sqrt{a^3+a^2b-ab^2-b^3}$.

208. 1) $\sqrt[n]{x^{n+1}y^{n+2}}$ и $\sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n-2}}}$; 2) $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^2}$ и $\sqrt[n]{\frac{a}{b^{2n-2}}}$;

3) $\sqrt[n]{x^{3+n}y^{3+n}}$ и $\sqrt[n]{\frac{y^3}{x^{2n-3}}}$; 4) $\sqrt[k+1]{a^{k+2}b^{k+1}}$ и $\sqrt[k+1]{\frac{b^{2k+2}}{a^k}}$.

§ 13. Сложение и вычитание радикалов.

209. Вычислить с точностью до 0,01:

1) $2{,}32+\sqrt{2}$; 2) $5{,}41-\sqrt{3}$;

3) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{6}$.

210. Упростить, а затем вычислить результат с точностью до 0,01:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{1}{2}\sqrt{8}-\frac{1}{5}\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$;

3) $5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{7}$;

4) $0{,}1\sqrt{200}-2\sqrt{0{,}08}+4\sqrt{0{,}5}+0{,}4\sqrt{50}$.

Выполнить действия и, если возможно, упростить.

211. 1) $(2\sqrt{18}+3\sqrt{8})+(3\sqrt{32}-\sqrt{50})$;

2) $(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18})+(\sqrt{72}-\sqrt{80})$;

3) $(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40})-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000})$;

4) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{48}\right)$.

212. 1) $(5\sqrt{a}-3\sqrt{25a})+(2\sqrt{36a}+2\sqrt{9a})$;

2) $(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x})$;

3) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{16a})+(\sqrt[4]{81a}-\sqrt[4]{625a})$;

4) $(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x})$.

213. Решить уравнения:

1) $2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=27-3\sqrt{3x}$;

2) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{x}+7=2\sqrt{x}$;

3) $\frac{5}{3}\sqrt{15x}-\frac{3}{5}\sqrt{15x}-11=\frac{1}{3}\sqrt{15x}$;

4) $3\sqrt{2x}-5\sqrt{8x}+7\sqrt{18x}=28$.

Выполнить действия:

214. 1) $(5\sqrt{4x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{9x}-8\sqrt{2x})+$
$+\left(8\sqrt{\frac{1}{4}x}+4\sqrt{8x}+1\right)$;

2) $\left(3\sqrt{8x}-\sqrt{18x}-5\sqrt{\frac{1}{2}x}\right)+\left(\sqrt{4\frac{1}{2}x}+\right.$
$\left.+\sqrt{50x}-\sqrt{32x}+\sqrt{72x}\right)$.

215. 1) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4,5}-\sqrt{12,5}-0,5\sqrt{200}+\sqrt{242}+$
$+6\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{24,5}$;

2) $\frac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\sqrt{54}+5\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}+$
$+4,5\sqrt{2\frac{2}{3}}+2\sqrt{27}$.

216. 1) $\sqrt[3]{40}+\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{-5}-2\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)$;

2) $\left(3\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{108}\right)-\left(16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-4\sqrt[3]{\frac{1}{72}}\right)$.

217. 1) $4\sqrt[3]{-3}-\sqrt[3]{\frac{8}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3}{8}}-\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}-$
$-\sqrt[3]{-0,375}+\sqrt[3]{46\frac{7}{8}}$;

2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{49}}+0,8\sqrt{\frac{8}{3}}-\frac{1}{15}\sqrt{96}+1,5\sqrt{\frac{3}{2}}+$
$+3\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{3}{14}\sqrt[3]{14}$.

218. 1) $6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-$
$-5b\sqrt{28a^3b}$;

2) $3\sqrt[3]{27a^6b}+2a^2\sqrt[3]{125b^4}+5a\sqrt[3]{a^3b}-$
$-3a^2\sqrt[3]{64b}+2\sqrt[3]{a^6b}.$

219. 1) $4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{2}{a}\sqrt[3]{a^5b}-3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{a^2b^4};$

2) $\sqrt[4]{\frac{1}{x^2y}}-\sqrt[4]{\frac{x^6}{y^5}}-\sqrt[4]{x^{10}y^7}+\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^6}}.$

220. 1) $7b\sqrt[3]{a}+5\sqrt{a^2x}-b^2\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}};$

2) $\frac{1}{m}\sqrt{8{,}64m^2z}-\frac{b^2}{c^3}\sqrt{\frac{6c^6z}{b^4}}+3{,}1a^2\sqrt{\frac{6z}{a^4}}+$
$+mx\sqrt{\frac{0{,}54z}{m^2x^2}}-\frac{a^2}{y}\sqrt{\frac{0{,}375y^2z}{a^4}}.$

221. 1) $\sqrt{(1+x)^2y}+\sqrt{(1-x)^2y}-\sqrt{(x-y)^2}-$
$-\sqrt{4y}+\sqrt{(x+y)^2};$

2) $\sqrt{4a^2-4b^2}+\sqrt{(a+b)^2}-5\sqrt{a^2-b^2}+$
$+\sqrt{9a^2-9b^2}-\sqrt{(a-b)^2}.$

222. 1) $\sqrt{2x^2-4x+2}-\sqrt{4y^2-8y+4}+$
$+\sqrt{2x^2+4x+2}+\sqrt{9y^2-18y+9};$

2) $\sqrt{a^2x-2abx+b^2x}-\sqrt{a^2x-2acx+c^2x}+$
$+\sqrt{b^2x+2bcx+c^2x}$ при $a>b>c.$

223. 1) $\sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{8x^3}}-\sqrt{\frac{2x}{(x^2-y^2)(x-y)}}-$
$-\sqrt{2x^4+2x^3y};$

2) $\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{x}{(1-x^2)^2}}-\sqrt[3]{x^6-x^4}+\sqrt[3]{\frac{(1-x)x^4}{(1+x)^2}}.$

224. 1) $3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\sqrt{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}-$
$-2a\sqrt{\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)^2}}+\frac{4x}{a+x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}};$

2) $2y\sqrt{x-y}+x\sqrt{\frac{1}{x-y}}-x\sqrt{\frac{a}{ax-ay}}-$
$-\sqrt{x^3-x^2y}+\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)}-y^2\sqrt{\frac{4(x-y)}{y^2}}.$

Решить уравнения:

225. 1) $4\sqrt{5x+4}-2\sqrt{5x+4}=48$;

2) $5\frac{1}{2}\sqrt{7x-13}-3\frac{1}{3}\sqrt{7x-13}-1\frac{1}{6}\sqrt{7x-13}=6$.

226. 1) $\sqrt{4x-20}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4$;

2) $\sqrt{16x+16}-\sqrt{9x+9}+\sqrt{4x+4}=16-\sqrt{x+1}$.

§ 14. Умножение и деление радикалов с одинаковыми показателями.

227. Вычислить с точностью до 0,1 площадь прямоугольника, длина и ширина которого выражаются числами:

1) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{7}$ и $2\sqrt{5}$.

Выполнить умножение:

228. (Устно.) 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; $\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}$;

2) $3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14}$; $\frac{3}{4}\sqrt{24}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}$;

3) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$; $5\sqrt[3]{48}\cdot 2\sqrt[3]{4}$;

4) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}$; $\sqrt{3m}\cdot\sqrt{3}$.

229. 1) $\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$; 2) $5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}$;

3) $3\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{a}}$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt{2\frac{1}{2}a}\cdot\sqrt{\frac{0,4}{a}}$.

230. 1) $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$;

2) $\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)\cdot 2\sqrt{6}$.

231. 1) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{a^3}-\frac{7}{8}\sqrt{a^5}\right)\cdot(-16\sqrt{a^3})$;

2) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}$.

232. 1) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{ab}{n}\sqrt{mn}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\cdot a^2b^2\sqrt{\frac{n}{m}}$;

2) $(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}$.

233. 1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$; 2) $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$;

3) $(5-\sqrt{15})(3+\sqrt{15})$; 4) $(7\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}-1)$.

234. 1) $(2a+3\sqrt{x})(3a-2\sqrt{x})$; 2) $\left(m-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)(m+\sqrt{mn})$.

235. Решить уравнения:

1) $(7-\sqrt{x})(8-\sqrt{x})=x+11$;

2) $(7+6\sqrt{x})(48-13\sqrt{x})=3(81-26\sqrt{x})(22+\sqrt{x})$.

236. Выполнить действия и упростить:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{5+3\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}-1}{6}$;

3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{15}$;

4) $\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{5}+1}{8}-\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{5}-2}{6}-\frac{4\sqrt{6}+5\sqrt{5}-1}{12}$.

237. Решить уравнения:

1) $\frac{17-3\sqrt{x}}{11}=\frac{23-4\sqrt{x}}{15}$; 2) $\frac{29-5\sqrt{x}}{9}=\frac{39-5\sqrt{x}}{19}$;

3) $\frac{3\sqrt{x}-5}{2}-\frac{2\sqrt{x}-7}{3}=\sqrt{x}-1$;

4) $\frac{7\sqrt{x}-13}{3}-\frac{3\sqrt{x}-8}{4}+\frac{4\sqrt{x}-11}{5}=3\sqrt{x}-7$.

238. Выполнить умножение:

1) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3})$;

2) $(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33})(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4)$;

3) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4})$;

4) $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)(\sqrt{1{,}2}+\sqrt{2}-4\sqrt{0{,}2})$.

239. Доказать тождества:

1) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})=7$;

2) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})=1$;

3) $(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})=m-n$;

4) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=a+b$.

Выполнить умножение:

240. 1) $(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$; 2) $(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})$;
3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$;
4) $(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})$.

241. 1) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$;
2) $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})$;
3) $(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})$;
4) $(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})$.

Доказать следующие равенства:

242. 1) $(\sqrt{0{,}6}+\sqrt{0{,}3}-\sqrt{0{,}9})(3\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}3}+\sqrt{0{,}6})=1{,}2$;
2) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{2}$.

243. 1) $(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{16})(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4})=6$;
2) $(12\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2})\left(5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=84$.

244. Решить уравнения:

1) $(7\sqrt{3x}-3\sqrt{7})(7\sqrt{3x}+3\sqrt{7})=$
$=10(2\sqrt{5x}+3\sqrt{6})(2\sqrt{5x}-3\sqrt{6})$;
2) $(3\sqrt{x}+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{5x})=$
$=(7\sqrt{x}+2\sqrt{13})(2\sqrt{13}-7\sqrt{x})$.

245. (Устно.) 1) Площадь одного квадрата равна 48 *см*^{2}, а площадь другого квадрата 3 *см*^{2}. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго?

2) Во сколько раз $\sqrt{45}$ больше $\sqrt{5}$?
3) Вычислить следующие отношения:

$\sqrt{18}:\sqrt{2}$; $\sqrt{40}:\sqrt{10}$; $\sqrt{200}:\sqrt{8}$; $\sqrt{180}:\sqrt{5}$.

246. (Устно.) Выполнить деление:

1) $8\sqrt{2}:4$; $10\sqrt[3]{5}:2$; $12\sqrt{a}:3$; $2\sqrt[4]{x}:5$.
2) $4\sqrt{2}:2\sqrt{2}$; $15\sqrt[3]{5}:3\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[5]{n}:4\sqrt[5]{n}$.

247. Вычислить с точностью до 0,1:

1) $\sqrt{10}:\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{15}:\sqrt{5}$;
3) $\sqrt{140}:\sqrt{20}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{5}}:\sqrt{0{,}3}$.

Выполнить деление:

248. (Устно.) 1) $\sqrt{60}:\sqrt{5}$; $\quad\sqrt{45}:\sqrt{15}$;

2) $\sqrt{90}:\sqrt{18}$; $\quad\sqrt{360}:\sqrt{60}$;

3) $\sqrt{3a}:\sqrt{a}$; $\quad\sqrt{5x}:\sqrt{x}$;

4) $\sqrt{12m}:\sqrt{3m}$; $\quad\sqrt{a^2x}:\sqrt{x}$;

5) $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$; $\quad\sqrt[3]{x^7}:\sqrt[3]{x^4}$;

6) $\sqrt[4]{a^5}:\sqrt[4]{a}$; $\quad\sqrt[4]{9a^3}:\sqrt[4]{\frac{a}{9}}$;

7) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}:\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; $\quad\sqrt[3]{0{,}2}:\sqrt[3]{25}$;

8) $9\sqrt{\frac{1}{45}}:\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$; $\quad 0{,}75\sqrt[3]{9}:0{,}25\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$.

249. 1) $(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}):\sqrt{3}$;

2) $(15\sqrt{50}+5\sqrt{200}-3\sqrt{450}):\sqrt{10}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{4}{5}\sqrt{\frac{4}{5}}\right):\frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

250. 1) $(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}):\sqrt{xy}$; 2) $(\sqrt{a^5b^3}-\sqrt{a^3b^5}):\sqrt{a^3b^3}$;

3) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right):\sqrt{x}$; 4) $\left(\sqrt{mn}+\sqrt{\frac{m}{n}}\right):\sqrt{\frac{m}{n}}$.

251. 1) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$; 2) $(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab):\sqrt{ab}$;

3) $\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}}$;

4) $\left(\frac{a}{2}\sqrt[3]{a^2b}+\frac{b}{3a^2}\sqrt[3]{\frac{15a}{b^2}}-\frac{4a}{5b}\sqrt[3]{\frac{b}{2a^2}}\right):\frac{2a^3}{15b^2}\sqrt[3]{\frac{5a^2}{2b}}$.

Разложить на множители:

252. 1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$; $\quad$ 2) $\sqrt{15}-\sqrt{10}$;

3) $\sqrt{21}+\sqrt{14}$; $\quad$ 4) $\sqrt{20}-\sqrt{30}$.

253. 1) $\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$; $\quad$ 2) $\sqrt[3]{a^2y}-\sqrt[3]{b^2y}$;

3) $\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}$; $\quad$ 4) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}$.

254. 1) $5+\sqrt{5}$; $\quad$ 2) $2-\sqrt{2}$; $\quad$ 3) $a+\sqrt{a}$; $\quad$ 4) $ab-\sqrt{a}$.

255. 1) $a+b+\sqrt{a+b}$; 2) $a+b-\sqrt{a^2-b^2}$;

3) $\sqrt{a^3-b^3}+\sqrt{a-b}$; 4) $\sqrt{a^3+b^3}+\sqrt{a^2-b^2}$.

256. 1) $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}$;

2) $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$;

3) $x+4\sqrt{x}+3$; 4) $a+5\sqrt{a}+4$.

257. Сократить дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$; 3) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{ax}-\sqrt[3]{ay}}$.

258. Выполнить деление:

1) $(\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{9n^2}):(\sqrt[3]{2m}+\sqrt[3]{3n})$;

2) $(\sqrt[3]{25a^2}-\sqrt[3]{16b^2}):(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})$;

3) $(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{16xy^2}+\sqrt[3]{4y^3}):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y})$;

4) $(\sqrt{8x^2y}-2y\sqrt{x}-x\sqrt{x}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x})$.

§ 15. Умножение и деление радикалов с различными показателями. Степени с дробными показателями.

259. Выполнить действия:

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$;

3) $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt{a}$; 4) $\sqrt[5]{m^4}:\sqrt[15]{m^2}$.

260. (Устно.) Заменить радикалы выражениями с дробными показателями[1]):

1) $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[5]{a^4}$; $\sqrt[n]{a^m}$; $\sqrt[n]{a}$;

2) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; $\sqrt{a^{-1}}$; $\sqrt[4]{a^{-3}}$;

3) $\sqrt{(a+b)^{-1}}$; $\sqrt[3]{(x-y)^{-2}}$; $\sqrt[5]{(m-n)^{-3}}$.

261. (Устно.) Заменить выражения с дробными показателями радикалами:

1) $x^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{2}}$; $m^{\frac{2}{3}}$; $n^{\frac{3}{4}}$; 2) $c^{\frac{2}{5}}$; $a^{\frac{1}{n}}$; $c^{\frac{n}{2}}$; $a^{-\frac{1}{2}}$;

---

[1]) В равенстве $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ буквы m и n обозначают натуральные числа и $a>0$.

3) $a^{-\frac{2}{3}}$; $b^{-0,5}$; $x^{-0,3}$; $m^{-0,75}$;

4) $a^{-2,5}$; $m^{-1,5}$; $(a+b)^{\frac{1}{2}}$; $(x+y)^{\frac{1}{3}}$;

5) $(x-y)^{\frac{2}{3}}$; $(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}$; $(a-b)^{-\frac{1}{2}}$; $(p+q)^{-\frac{m}{n}}$.

Вычислить:

262. (Устно.) $25^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{1}{3}}$; $5\cdot 16^{\frac{1}{4}}$; $3\cdot 8^{\frac{2}{3}}$; $-2\cdot 27^{\frac{1}{3}}$; $2^{-2}\cdot 64^{\frac{1}{2}}$.

263. 1) $2^{-1}\cdot 64^{\frac{2}{3}}$; 2) $3^{-2}\cdot 81^{\frac{1}{4}}$; 3) $100^{-\frac{1}{2}}$;

4) $81^{-\frac{3}{4}}$; 5) $64^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

264. 1) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 2) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $(0{,}008)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $(0{,}001)^{-\frac{4}{3}}$; 5) $3^{\frac{4}{3}}\cdot 9^2\cdot 27^{-\frac{5}{6}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}$;

6) $5^{\frac{4}{5}}\cdot 125\cdot 25^{-0,4}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$.

Выполнить действия, заменяя радикалы степенями с дробными показателями:

265. 1) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[15]{x^4}$; 2) $\sqrt[12]{n^{11}}:\sqrt[4]{n^3}$; 3) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}$;

4) $\sqrt[4]{x}:x^{-\frac{1}{4}}$.

266. 1) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$; 2) $m\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot m^2\sqrt[8]{3m^3}$;

3) $a^2b\sqrt[6]{16a^5b}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2ab}\cdot b\sqrt[3]{4ab^2}$;

4) $2m^2n\sqrt[4]{mn^3}\cdot 5mn^2\sqrt{mn}\cdot 3mn\sqrt[5]{m^3n}$.

267. 1) $6ab\sqrt[9]{a^8b^3}:\frac{2a}{3b}\sqrt[6]{a^2b^5}$;

2) $10a^2b:5a\sqrt{b}$; 3) $a^2x:\sqrt[3]{ax^2}$;

4) $\frac{4a^2}{15b}\sqrt[4]{\frac{a^2}{a-b}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{a^3}{a-b}}$.

268. 1) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{81x^5}{25y^4}}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3y}{5x}}$; 2) $0{,}2\sqrt[5]{\frac{ab^3}{cd^4}}\cdot 5\sqrt[10]{\frac{c^3d^2}{a^3b}}$;

3) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\cdot\frac{b}{a}\sqrt[5]{\frac{y^2}{x}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{a^3}{b}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^5}}\cdot\sqrt[10]{\frac{b}{a}}$.

269. 1) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{8})\cdot\sqrt{2}$;

2) $(3\sqrt{10}-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{25})\cdot\sqrt[4]{2}$;

3) $\left(\sqrt[5]{5}-3\sqrt[3]{\frac{15}{2}}+2\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[4]{\frac{24}{5}}$;

4) $(\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{4}-\sqrt{8})\cdot\sqrt[6]{32}$.

270. 1) $(4\sqrt{8}-6\sqrt[3]{2}):\sqrt{2}$;

2) $(10\sqrt[3]{9}+5\sqrt{3}):\sqrt[3]{3}$;

3) $(2\sqrt{12}+4\sqrt[3]{4}-6\sqrt[4]{32}):2\sqrt[4]{2}$;

4) $\left(\frac{3}{4}\sqrt[6]{54}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{18}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}\right):\frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$.

271. 1) $(8\sqrt[6]{m^5}-6\sqrt[4]{m^3}-12\sqrt[3]{m^2}):2\sqrt{m}$;

2) $(a^3\sqrt[3]{x^2y^2}+a^4\sqrt{xy}-a^5\sqrt[6]{x^4y^5}):a^2\sqrt{xy}$;

3) $\left(\frac{a}{b^3}\sqrt{ab}-6a^3b^2\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[8]{a^4b^3}\right):\frac{a^2}{b}\sqrt[6]{ab^2}$;

4) $\left(2a\sqrt{\frac{a^2}{3b^3}}+\frac{3a}{b}-5\sqrt[3]{ab}\right):\frac{3a}{2b}\sqrt{ab}$.

272. 1) $(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt[3]{3})$;

2) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})$;

3) $(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[4]{3})\cdot(5\sqrt{2}-3\sqrt[3]{3})$;

4) $\left(\frac{3}{4}\sqrt[6]{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{16}\right)$.

273. 1) $(2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^5}\right)$;

2) $(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3})$;

3) $(2\sqrt[5]{m^4}+\sqrt[3]{m^2}-3\sqrt{m})\cdot(\sqrt[15]{m^4}-\sqrt[3]{m})$;

4) $(4\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xy^2}+3\sqrt[4]{xy^3})\cdot(\sqrt[12]{xy^4}-2\sqrt{xy})$.

274. 1) $(x^2\sqrt[4]{27xy^3}+2xy\sqrt{2xy}):(\sqrt[4]{3x^3y}+\sqrt{2xy})$;

2) $(y\sqrt{2xy}-xy\sqrt{xy}):(\sqrt[6]{2xy^3}-\sqrt{xy})$;

3) $(x\sqrt[6]{a^5x}+2a\sqrt[6]{ax^5}-3ax):(\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt{ax})$;

4) $(2a\sqrt[3]{ax^2}-a\sqrt[6]{ax^5}-ax):(\sqrt[3]{a^2x}-\sqrt{ax})$.

275*. 1) $(ax^3\sqrt[6]{x}-a^2x^2\sqrt[3]{a^2}):(a\sqrt[3]{ax^2}-x\sqrt[4]{a^2x})$;

2) $(5b\sqrt[4]{a}-8\sqrt[4]{a^2b^3}+4\sqrt[4]{a^3b^2}-b\sqrt[4]{b}):(2\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b})$;

3) $(20\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}+45\sqrt[4]{a^3}-53\sqrt[12]{a^7}):(4\sqrt[6]{a}-5\sqrt[4]{a})$;

4) $(\sqrt{a}-9\sqrt[4]{ab}-6\sqrt[8]{abc^2}-\sqrt{c}):(\sqrt[4]{a}-3\sqrt[8]{ab}-\sqrt[4]{c})$.

§ 16. Возведение радикалов в степень и извлечение из них корня.

Возвести в степень:

276. (Устно.) 1) $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt[3]{2})^3$; $(\sqrt[5]{3})^5$; $(\sqrt[n]{a})^n$;

2) $(3\sqrt{2})^2$; $(5\sqrt[3]{3})^3$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}\right)^4$; $(a\sqrt[n]{b})^n$;

3) $(\sqrt{3})^4$; $(\sqrt[3]{2})^6$; $(\sqrt[5]{7})^{10}$; $(\sqrt[4]{5})^8$;

4) $(\sqrt{2})^3$; $(\sqrt{5})^3$; $(\sqrt[3]{7})^4$; $(\sqrt[5]{3})^7$.

277. (Устно.) 1) $(-\sqrt{6})^2$; $(-\sqrt[3]{4})^4$; $(-\sqrt[4]{3})^4$; $(-\sqrt[5]{7})^5$;

2) $(\sqrt[3]{m^2})^4$; $(-\sqrt[3]{m^2})^4$; $(\sqrt[5]{a^3})^2$; $(-\sqrt[7]{n^3})^2$;

3) $(\sqrt[4]{x^3})^3$; $(-\sqrt[5]{y^2})^3$; $(-\sqrt[3]{a^2})^5$; $(-\sqrt[6]{n^5})^7$;

4) $(-2\sqrt{a})^3$; $(-3\sqrt[4]{a^3})^3$; $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{m^2})^2$; $\left(-\frac{2}{3}\sqrt[5]{x^2}\right)^3$.

278. 1) $(\sqrt[3]{a^2b})^2$; $(-\sqrt[3]{xy^2})^4$; $\left(-\frac{3}{5}\sqrt[4]{x^3y}\right)^3$; $(0{,}1\sqrt[5]{a^4b^2})^2$.

2) Что больше $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt{2}$? $\sqrt{5}$ или $\sqrt[3]{11}$? $\sqrt[7]{5}$ или $\sqrt[3]{2}$?

Выполнить указанные действия, пользуясь там, где это выгодно, отрицательными и дробными показателями:

279. 1) $(-0{,}2\sqrt[4]{m^2n^3})^3$; 2) $\left(-\frac{1}{2}\sqrt[6]{a^5b^2}\right)^4$;

3) $\left(-1\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c}\right)^4$; 4) $(0{,}5\sqrt[7]{x^3y^4z})^3$.

280. 1) $(a\sqrt{ab})^3$; 2) $(m^2\sqrt[3]{m^2n})^2$;

3) $(-x\sqrt[4]{x^3y^2})^5$; 4) $(-2a\sqrt[5]{a^2b^3})^4$.

281. 1) $\left(\frac{y}{x}\sqrt[4]{x^2y}\right)^3$; 2) $\left(\frac{ab}{c}\sqrt[5]{a^3b^2c^4}\right)^2$;

3) $\left(-\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3$; 4) $\left(\frac{x}{y}\sqrt[6]{\frac{y}{x}}\right)^3$.

282. 1) $\left(-3m\sqrt[3]{\frac{m^2}{n}}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{2a}{3b}\sqrt[6]{a^5b^3}\right)^2$;

3) $\left(3x^2\sqrt{\frac{a}{3x}}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{x}{2y}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^5$.

283. 1) $\left(\frac{a^2}{a+x}\sqrt[3]{\frac{a+x}{a^2}}\right)^4$; 2) $\left(-\frac{m+n}{m-n}\sqrt[3]{\frac{(m-n)^2}{m+n}}\right)^5$;

3) $\left(\frac{x\sqrt[3]{(x-y)^2}}{x-y}\right)^4$; 4) $\left(\frac{a(a-b)}{\sqrt[5]{a^2(a-b)^4}}\right)^6$.

284. 1) $(\sqrt{2}+1)^2$; 2) $(1-\sqrt{3})^2$;

3) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$; 4) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$.

285. 1) $(a-\sqrt{b})^2$; 2) $(m+\sqrt{n})^2$;

3) $\left(2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{xy}+2\sqrt{x}\right)^2$.

286. 1) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2$;

3) $(2\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$.

287. 1) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2$; 2) $(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^2$;

3) $(m^{-\frac{1}{3}}-n^{\frac{2}{3}})^2$; 4) $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2$.

288. 1) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4})^2$; 2) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}\right)^2$;

3) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a})^2$; 4) $(a\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{a})^2$.

289. 1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$; 2) $(\sqrt{3}-\sqrt{12}+1)^2$;

3) $\left(2\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$; 4) $(3\sqrt{15}+2\sqrt{5}-5\sqrt{10})^2$.

290. 1) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$.

291. 1) $(2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{4}})(2x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}})$;

2) $(a^{\frac{2}{3}}-3b^{-1})(a^{\frac{2}{3}}+3b^{-1})$;

3) $(2a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}})^3$; 4) $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$.

292. Доказать следующие тождества при $a>0$, $b>0$ и $a^2-b>0$:

$$1)\ \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$2)\ \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Указание. Для доказательства достаточно возвести в квадрат обе части равенства и сделать упрощения.

3) Пользуясь выведенными формулами, упростить выражения:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}};\quad \sqrt{5-\sqrt{21}};\quad \sqrt{6+4\sqrt{2}};$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}};\quad \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}.$$

293. Проверить равенства:

$$1)\ \sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt[4]{16};\quad 2)\ \sqrt[4]{256}=\sqrt{\sqrt{256}};$$

$$3)\ \sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64};\quad 4)\ \sqrt[6]{729}=\sqrt[3]{\sqrt{729}}.$$

Извлечь корень:

294. 1) $\sqrt[4]{1296}$; 2) $\sqrt[4]{2401}$; 3) $\sqrt[6]{15625}$; 4) $\sqrt[12]{4096}$.

295. 1) (Устно.) $\sqrt{\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$.

2) (Устно.) $\sqrt{\sqrt{a}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{m^3}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[5]{y^4}}$.

3) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$; $\sqrt[4]{5\sqrt{2}}$.

4) $\sqrt{m\sqrt[3]{m}}$; $\sqrt[3]{ab\sqrt{a}}$; $\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}$; $\sqrt[5]{a^4\sqrt{a}}$.

5) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}b^5}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4y^8}}$.

296. 1) $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}$; 2) $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{n}{m}}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}}}$; 4) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}$.

297. 1) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; 2) $\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$;

3) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}}}$.

298. 1) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; 2) $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt{m}}}$;

3) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$; 4) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$.

299. 1) $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}}}$; 2) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{a}}}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{a}{x}\sqrt{\frac{1}{ax}\sqrt{\frac{a}{x^3}}}}$.

300. 1) $\sqrt[\frac{1}{2}]{10}$; 2) $\sqrt[\frac{2}{3}]{2\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt[-2]{9}$; 4) $\sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{8}{27}}$.

301*. 1) $\sqrt[\frac{3}{4}]{a^3b^6x^{-2}}$; 2) $\sqrt[-\frac{4}{3}]{\frac{(a+b)^8}{(a-b)^4}}$;

3) $\sqrt[1,5]{\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{2}}c^{4,5}}{8x^{\frac{1}{2}}}}$; 4) $\sqrt[-\frac{5}{6}]{\frac{a^{-\frac{5}{3}}x^{1,25}}{b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{5}{16}}}}$.

§ 17. Приведение к рациональному виду числителей или знаменателей дробных иррациональных выражений.

302. В следующих примерах вычислить результат действий (с точностью до 0,01) двумя способами:

1) не выполняя преобразований данного выражения;

2) предварительно уничтожив иррациональность в знаменателе дроби:

$$\frac{2}{\sqrt{2}};\quad \frac{3}{\sqrt{3}};\quad \frac{6}{\sqrt{3}};\quad \frac{10}{\sqrt{5}}.$$

Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби:

303. (Устно.) 1) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; $\frac{18}{\sqrt{6}}$; $\frac{5}{\sqrt{10}}$; $\frac{12}{5\sqrt{3}}$.

2) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; $\frac{m}{\sqrt{m}}$; $\frac{2x^2}{\sqrt{x}}$; $\frac{5n}{3\sqrt{n}}$.

304. 1) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; 2) $\frac{5}{2\sqrt[3]{25}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; 4) $\frac{7}{5\sqrt[3]{49}}$;

5) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$; 6) $\frac{m}{\sqrt[3]{m}}$; 7) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$; 8) $\frac{n^2}{\sqrt[4]{n^3}}$.

305. 1) $\frac{9}{\sqrt[4]{9}}$; 2) $\frac{5}{\sqrt[4]{125}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[5]{27}}$; 4) $\frac{16}{\sqrt[6]{8}}$.

306. 1) $\frac{a}{\sqrt[7]{x^4}}$; 2) $\frac{a}{b\sqrt[6]{a}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$; 4) $\frac{a}{\sqrt[n]{x}}$.

307. 1) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$; 3) $\frac{a+b}{2\sqrt{a-b}}$; 4) $\frac{a-b}{b\sqrt{a+b}}$.

308. 1) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a-b}}$; 2) $\frac{m+n}{\sqrt[3]{(m+n)^2}}$; 3) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$; 4) $\frac{a+3}{\sqrt[3]{a^2-9}}$.

309. 1) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{12}{3-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{7}-1}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$.

310. 1) $\frac{m}{\sqrt{m}+1}$; 2) $\frac{n}{1-\sqrt{n}}$; 3) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

311. 1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 3) $\frac{1-m}{\sqrt{1-\sqrt{m}}}$; 4) $\frac{1-n}{\sqrt{1+\sqrt{n}}}$.

312. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$;

3) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$; 4) $\frac{14}{\sqrt{3}-\sqrt{10}}$.

313. 1) $\frac{9}{2\sqrt{3}-3}$; 2) $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$;

3) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$; 4) $\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$.

314. 1) $\frac{7\sqrt{3}-5\sqrt{11}}{8\sqrt{3}-7\sqrt{11}}$; 2) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$;

3) $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$; 4) $\frac{7\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{10\sqrt{3}+8\sqrt{5}}$.

315. 1) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$; 2) $\frac{m+n+\sqrt{m^2-n^2}}{m+n-\sqrt{m^2-n^2}}$;

3) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}$; 4) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

Уничтожить иррациональность в числителе дроби:

316. (Устно.) 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt[3]{9}}{6}$; $\frac{\sqrt{mn}}{m}$; $\frac{\sqrt[5]{n^3}}{n}$;

2) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{6}$.

317. 1) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$; 2) $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{xy}$; 3) $\frac{\sqrt{a}+1}{a}$; 4) $\frac{1-\sqrt{m}}{m}$.

318. 1) $\frac{\sqrt[3]{(x-y)^2}}{x^2-y^2}$; 2) $\frac{3+\sqrt{m}}{3-\sqrt{m}}$; 3) $\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$; 4) $\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$.

Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби:

319. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; 2) $\frac{1}{5+\sqrt{7}+\sqrt{11}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

320*. 1) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$; 2) $\frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$;

3) $\frac{a}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; 4) $\frac{a}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

321. 1) $\frac{a}{\sqrt{5+\sqrt{3}}}$; 2) $\frac{15}{\sqrt{7-2\sqrt{6}}}$;

3) $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$; 4) $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

322*. 1) $\frac{n}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 2) $\frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 3) $\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; 5) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}+1}$; 6) $\frac{1}{1-\sqrt[3]{5}}$; 7) $\frac{4}{2-3\sqrt[3]{2}}$.

323*. 1) $\frac{n}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$; 2) $\frac{n}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}$; 7) $\frac{a}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2}}$.

§ 18. Задачи для повторения главы „Степени и корни“.

Выполнить действия:

324. 1) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2}$;

2) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{3}-2}+\frac{\sqrt{3}-1}{6}$;

3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$;

4) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$.

325. 1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\frac{1}{a+a\sqrt{b}}-\frac{1}{a-a\sqrt{b}}$;

3) $\frac{a}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{\sqrt{ac}-a}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}$;

4) $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$.

326. 1) $\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right):(a+\sqrt{a^2-b^2})$;

2) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$;

3) $\left(\sqrt{a}+\frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right):(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c})$;

4) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$.

327. 1) $\left(\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}-\frac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right):\frac{4m\sqrt{m^2-n^2}}{n^2}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{c+d}-\sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d}+\sqrt{c-d}}-\frac{\sqrt{c+d}+\sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d}-\sqrt{c-d}}\right)\cdot\frac{d\sqrt{c^2-d^2}}{4}$;

3) $(1-a^2):\left[\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right]+1$;

4) $\left(\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$.

328. 1) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$;

2) $\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{ab}$;

3) $\left[\left(\frac{1}{a}-\sqrt[6]{\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{a^2}\right)^2+\frac{2}{a^2}\sqrt[6]{a^5}-\frac{3}{a}\sqrt[3]{a^2}\right]:a\sqrt[3]{a};$

4) $\left[\left(\sqrt{n}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{n^3}-n\right)^2+\frac{7}{4}n\sqrt{n}-n^2\right]:n\sqrt{n}.$

329. 1) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$

2) $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right);$

3) $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y};$

4) $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right).$

330. Найти числовое значение выражения:

$$4x^3-8x^2+2x+3 \text{ при } x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}).$$

331. Найти числовое значение выражения:

$$5x^2-6xy-2y^2 \text{ при } x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \text{ и } y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

332. Доказать, что дробь

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} \text{ при } x=\frac{2ab}{b^2+1}$$

принимает значение, равное b, если $b>1$, и $\frac{1}{b}$, если $b<1$.

333*. Доказать, что дробь

$$\frac{x+y-1}{x-y+1} \text{ при } x=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} \text{ и } y=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}$$

принимает значение, равное $(-\sqrt{ab})$.

334. Доказать, что при $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ выражение ax^2+bx+c обращается в нуль.

335. Упростить выражение

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}},$$

если $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$, где $0<a<b<2a$.

336. Упростить выражение:

$$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}, \text{ где } x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

причём $a>0$, $b>0$ и $a>b$.

337. Доказать равенство:

$$\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2=1, \text{ если } x>0,\ a>0,\ x>a.$$

338. Доказать, что если $x=\sqrt{ab}$ и $a>b$, то

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Упростить:

339. $\left[(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}\left[\left(\frac{1}{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right]:\frac{a^{\frac{5}{4}}+(a^4b)^{\frac{1}{4}}}{a-b}$

при $a>0$; $b>0$; $a>b$.

340. 1) $\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}-\frac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m-n}$;

2) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$.

341. $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x^2-x+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{x^2+x+1}\right):\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3-1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3+1}\right)$.

342. 1) $\left[\frac{(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}})(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right]\cdot\frac{2\sqrt{2,5}\,(a+b)^{-1}}{\sqrt[-2]{10}}$;

2) $\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right]:[(1-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-2x+x^2)^{-1}]$;

3) $\{1-[x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]^2\}^{-1}\cdot(1+x^2)^{-1}\cdot[x^0(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-$

$-x^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]$;

4) $\left[\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right]\cdot\frac{a^0+a(a-2)}{\frac{1}{a^{-2}}-a+1}:\sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}}$.

343. Упростить выражение: $\left(1+\frac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}-y^{-n}}\right)^{-2}$, и вычислить его числовое значение при $x=3$; $y=0{,}75$; $n=\frac{1}{2}$.

344. Упростить выражение: $\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$, и вычислить его числовое значение при $a=\frac{1}{16}$; $b=\frac{1}{81}$.

345. Выполнить действия:

1) $\left[\left(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}\cdot(a-x)-\frac{a+x}{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}\right]\cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$;

2) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right]^{-0,5}-7{,}5\left({}^{-\frac{4}{3}}\sqrt[3]{4}\right)^{2}-(-2)^{-4}+81^{0,25}$;

3) $0{,}027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0,75}-3^{-1}+5{,}5^{0}$.

346. 1) Выяснить, что больше: $\sqrt[3]{0{,}1}$ или $\sqrt{0{,}1}$?
$\sqrt{3}$ или $\sqrt[3]{5}$? $\sqrt{6}$ или $2{,}44921$?

2) Доказать, что выражение

$$\sqrt{\frac{3}{4}-x}+\sqrt{2x}-\frac{3}{2}\sqrt{1-4x}$$

обращается в нуль при $x=\frac{1}{12}$.

3) Упростить выражение:

$$a+\sqrt{(a-3)^{2}} \text{ при } a>3;\ a<3.$$

4) Выполнить действия:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{(1-x^{2})^{-1}}+\frac{2^{\frac{3}{2}}}{x^{-2}}\right]:\left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)^{-1} \text{ при } x\neq 1.$$

5) Вычислить:

$$\left[4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\left[4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right].$$

ГЛАВА III.

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ И ПРИВОДИМЫЕ К НИМ.

§ 19. Неполные квадратные уравнения.

347. (Устно.) Решить неполные квадратные уравнения:

1) $x^2=81$; $x^2=0{,}16$; $x^2=\frac{4}{9}$; $x^2=6\frac{1}{4}$;

2) $x^2-10=39$; $x^2+5=30$; $2x^2=32$; $5x^2=20$.

348. Следующие уравнения решить с помощью таблиц квадратных корней:

1) $x^2=5041$; $x^2=9604$; $x^2=0{,}4624$;

2) $\frac{5}{9}x^2=3380$; 3) $0{,}09x^2-0{,}6084=0$.

349. Вычислить приближённые значения корней следующих уравнений (с точностью до 0,01):

1) $x^2-2=0$; 2) $x^2-52=0$;

3) $2x^2=42$; 4) $\frac{x^2}{3}-0{,}5=0$.

350. Решить следующие уравнения, определив допустимые значения букв:

1) $a^2x^2-b^2=0$; 2) $a^2x^2-1=0$;

3) $ax^2-\frac{1}{a}=0$; 4) $ax^2-\frac{b^2}{a}=0$.

351. (Устно.) Решить уравнения:

1) $x^2-x=0$; 2) $x^2+3x=0$;

3) $x^2+\frac{1}{2}x=0$; 4) $x^2-0{,}4x=0$.

352. 1) $4x^2+6x=9x^2-15x$; 2) $13x+7x^2=5x^2+8x$;
3) $12x^2-5x=9x^2+7x$; 4) $8{,}5x-3x^2=3{,}5x+2x^2$.

353. 1) $x(x-15)=3(108-5x)$;
2) $47-x(3x+4)=2(17-2x)-62$;
3) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$;
4) $10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x)$.

354. 1) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(5x+2)=96$;
2) $(2x-7)^2+(3x-5)^2-(4x-9)(4x+9)=$
$=2(64-29x)$.

355. 1) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3$; 2) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10$;
3) $\frac{8x^2-3}{5}+\frac{9x^2-5}{4}=2$; 4) $\frac{13x^2-4}{12}-\frac{20-3x^2}{18}=3\frac{5}{9}$.

356. 1) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=2\frac{2}{3}$; 2) $\frac{x}{x+4}+\frac{x}{x-4}=5\frac{5}{9}$;
3) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+2}=8\frac{2}{3}$.

357. 1) $(x+a)(x-b)+(x+b)(x-a)=2a^2-2ab$;
2) $(a+x)(a+2x)-(a-x)(a-2x)=$
$=(a+3x)^2-a^2-9b^2$;
3) $(ax+b)^2-(a-bx)^2-4abx+a^2(x^2-1)=0$.

358. 1) $\frac{a^3x}{b}=\frac{b}{ax}$; 2) $\frac{ax}{b^2}=\frac{b^2}{a^5x}$; 3) $\frac{a^5}{b^3x}=\frac{bx}{a^5}$; 4) $\frac{m^3}{n^2x}=\frac{n^4x}{m}$.

359. 1) $\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x-a}=2\frac{2}{3}$; 2) $\frac{ax+b}{a}=\frac{ab}{a^2-x}$;
3) $\frac{ax+b}{x-a}=\frac{x-b}{x+a}$; 4) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}$.

§ 20. Полные квадратные уравнения[1]).

(Уравнения № 360—362 решить путём выделения полного квадрата двучлена.)

360. 1) $x^2+8x-33=0$; 2) $x^2+12x-64=0$;
3) $x^2-8x=20$; 4) $x^2-4x=45$.

361. 1) $x^2+12x=-35$; 2) $x^2+14x+24=0$;
3) $x^2-11x+30=0$; 4) $x^2-11x=60$.

362. 1) $x^2+x-30=0$; 2) $x^2-x-12=0$;
3) $x^2-x-20=0$; 4) $x^2-7x+12=0$.

---

[1]) Параллельно с решением упражнений на квадратные уравнения весьма целесообразно решать и соответствующие задачи на составление квадратных уравнений из § 22.

363. 1) При каких значениях x трёхчлен $y = x^2 + 7x + 10$: а) обращается в нуль? б) принимает значение, равное 4? в) может иметь значение, равное (-5)?

2) При каких значениях x трёхчлен $y = x^2 + 7x + 6$ и двучлен $y = x + 1$ принимают равные значения и какие именно?

Решить уравнения:

364. 1) $x^2 - \frac{5}{3}x - 26 = 0$; 2) $x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 0$;

3) $x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$; 4) $x^2 + 3\frac{5}{12}x + 2 = 0$;

5) $x^2 - 2{,}4x - 13 = 0$; 6) $x^2 - 5{,}6x + 6{,}4 = 0$.

365. 1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; 2) $2x^2 - 7x + 6 = 0$;
3) $4x^2 + x - 3 = 0$; 4) $5x^2 - 8x + 3 = 0$.

366. 1) $10x^2 - 3x - 1 = 0$; 2) $3x^2 + 2x - 8 = 0$;
3) $3x^2 + 11x + 6 = 0$; 4) $4x^2 - 17x - 15 = 0$.

367. 1) $(3x - 1)(x + 2) = 20$; 2) $(x - 4)(4x - 3) + 3 = 0$;
3) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 - (x - 5)^2 = 17x + 24$;
4) $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 + (x - 7)(x + 7) = 11x + 30$.

368. 1) $\frac{3x - 7}{x + 5} = \frac{x - 3}{x + 2}$; 2) $\frac{5 + 2x}{4x - 3} = \frac{3x + 3}{7 - x}$;

3) $\frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{5x - 3}{3x + 5}$; 4) $\frac{5 - x}{2x - 1} = \frac{15 - 4x}{3x + 1}$.

369. 1) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x + 5}{6}$; 2) $\frac{x(x - 7)}{3} - 1 = \frac{11x}{10} - \frac{x - 4}{3}$;

3) $\frac{5(x - 1)}{4} = \frac{x}{6} + \frac{6}{x}$; 4) $\frac{7}{x} - \frac{21 + 65x}{7} + 8x + 11 = 0$.

370. 1) $\frac{(x + 3)^2}{5} + 1 - \frac{(3x - 1)^2}{5} = \frac{x(2x - 3)}{2}$;

2) $\frac{5x - x^2}{3} - \frac{(5x - 11)^2}{4} = 6 - \frac{(7 - x)^2}{2}$;

3) $\frac{(x - 12)^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{x(x - 9)}{18} = \frac{(x - 14)^2}{2} + 5$;

4) $6x + \frac{(3 + 5x)^2}{2} = \frac{8 - 2x}{5} - \frac{(x + 3)(x + 7)}{2}$.

371. 1) $3x + \frac{(x - 3)^2}{4} = \frac{(x + 3)^2}{8} + \frac{(x + 1)(x - 1)}{3}$;

2) $\frac{5x - 1}{9} + \frac{3x - 1}{5} = \frac{2}{x} + x - 1$;

3) $x - 7 + \frac{(x - 6)^2}{3} = \frac{(x + 4)^2}{2} - \frac{(x + 2)(x + 6)}{4}$.

372. Равносильны ли следующие уравнения:

1) $x-7=3-x$ и $(x-7)x=(3-x)x$;

2) $(x-4)(x+2)=5(x-4)$ и $x+2=5$;

3) $x+2=3$ и $(x+2)^2=3(x+2)$;

4) $(3-x)(x-1)=(x+2)(x-1)$ и $3-x=x+2$;

5) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{3-x}{x-1}$ и $x+1=3-x$;

6) $x^2+5x+8=2$ и $x^2+5x+6=0$.

Решить уравнения:

373. 1) $\frac{6}{5x-1}=3x+8$; 2) $5x+6=\frac{7}{2x+9}$;

3) $\frac{x(1-x)}{1+x}=6$; 4) $5-\frac{45}{4x^2-1}=\frac{3x}{2x-1}-\frac{39}{2x+1}$.

374. 1) $4-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x+7)}{x+1}-\frac{x+11}{x^2-1}$;

2) $\frac{14}{x^2-9}+\frac{4-x}{3+x}=\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}$;

3) $\frac{7}{x+1}+\frac{x+4}{2x-2}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$;

4) $\frac{x+0,5}{9x+3}=\frac{x+2}{3x-1}-\frac{8x^2+3}{9x^2-1}$.

375. 1) $\frac{13-x}{3+x}+\frac{6}{x^2-9}=\frac{3}{x+3}-\frac{2}{3-x}$;

2) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$;

3) $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}$;

4) $\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x-1}=\frac{1}{x-4}-\frac{2}{x-3}$.

376. 1) $1-\frac{8}{x-4}=\frac{5}{3-x}-\frac{8-x}{x+2}$;

2) $1-\frac{3-2x}{5-x}=\frac{3}{3-x}-\frac{x+3}{x+1}$;

3) $\frac{x+1}{4x}-\frac{5x-1}{2x-4}=\frac{8-x}{3x^2-6x}-\frac{x-5}{x-2}$;

4) $\frac{20+x}{2x-2}-\frac{9x^2+x+2}{6x^2-6}=\frac{5-3x}{x+1}-\frac{10-4x}{3x+3}$.

377. 1) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$;

2) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$;

3) $\frac{13}{x^3+1}-\frac{17x+10}{5x^2-5x+5}=-\frac{5}{x+1}$;

4) $\frac{x+36}{x^3-1}=\frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}$.

378. 1) $\frac{1}{4x+8}=\frac{20x+1}{4x^2-16}-\frac{7-5x}{x^2-4x+4}$;

2) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$;

3) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+10x}{x^4-1}-\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$;

4) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$.

379. 1) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+20}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}$;

2) $\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-7}$;

3) $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-11}-\frac{1}{x-10}$;

4) $\frac{1}{x-9}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x+18}+\frac{1}{x-10}$.

380. 1) $\frac{1}{6x+6}+\frac{1}{3x+6}=\frac{1}{x+3}$; 2) $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2x+2}$;

3) $\frac{x+11}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x+7)}{x+1}-4$;

4) $\frac{4(3x+1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$.

381. 1) $\sqrt{2}z^2+4\sqrt{3}z-2\sqrt{2}=0$;

2) $z^2+2(\sqrt{3}+1)z+2\sqrt{3}=0$;

3) $\frac{x\sqrt{5}}{2x-\sqrt{5}}=\frac{2x}{x\sqrt{5}-3}$; 4) $\frac{2x}{x\sqrt{3}-5}=\frac{x\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}}$.

382. Вычислить приближённые значения корней следующих уравнений (с точностью до 0,1):

1) $2x^2+15x+5=0$; 2) $3x^2+14x+4=0$;

3) $5x^2+24x+9=0$; 4) $7x^2-27x+12=0$;

5) $4x^2+3x-2=0$; 6) $6x^2-10x-1=0$.

383. Решить графически следующие уравнения:

1) $x^2-x-2=0$ (черт. 14); 2) $x^2-2x-3=0$;

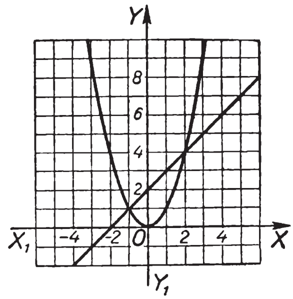
3) $2x^2-3x-4=0$; 4) $\frac{2x-5}{x-1}=\frac{5x-3}{3x+5}$.

Решить уравнения с буквенными коэффициентами[1]):

384. 1) $x^2+2ax-3a^2=0$; 2) $x^2-11ax-60a^2=0$;
3) $x^2-3ax+2a^2-ab-b^2=0$;
4) $x^2-4ax+4a^2=b^2$.

385. 1) $x^2-(2a-b)x+a^2-ab-2b^2=0$;
2) $x^2-5(a-b)x+6a^2-13ab+6b^2=0$;
3) $(a^2-b^2)x^2-4abx=a^2-b^2$;
4) $(ax-b)^2+(a-bx)^2+4abx=2(a^2+b^2)x$.

386. 1) $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$;
2) $\frac{x-b}{a-b}=\frac{x^2}{a^2}$;
3) $\frac{3x-a}{a}=\frac{4x-a}{2x}$;
4) $\frac{2x-a}{b}=\frac{4x-b}{2x+a}$.



Черт. 14.

387. 1) $1+\frac{4a}{x+a}=\frac{3x}{2x-a}$;
2) $\frac{1}{b+x}=\frac{3b}{2x^2}-\frac{1}{x}$;
3) $\frac{3x+a}{b}=4-\frac{9x-3a}{6x-b}$; 4) $\frac{m}{x-m}-\frac{x}{x+m}=\frac{7}{5}$.

388. 1) $\frac{2x}{x+b}+\frac{x}{x-b}=\frac{b^2}{4x^2-4b^2}$;
2) $\frac{5a^2}{4x^2-a^2}=\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}$;
3) $\frac{x^2+4ab}{b^2-x^2}=\frac{x-a}{x+b}-\frac{x+a}{x-b}$; 4) $\frac{2x}{a-x}-\frac{3x^2}{x^2-a^2}=\frac{9a}{2a+2x}$.

389. 1) $\frac{2x}{x-b}+\frac{12x^2}{b^2-x^2}=\frac{b-x}{x+b}$;
2) $\frac{2ax}{2ax-b}=\frac{3b}{2ax+b}-\frac{a^2x^2+2b^2}{b^2-4a^2x^2}$;
3) $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}$;
4) $\frac{x}{a}+\frac{1}{ax-bx}+\frac{b}{a^2x-abx}=\frac{2}{a-b}$.

---

[1]) К примерам на решение квадратных уравнений с буквенными коэффициентами ответы даны при следующих условиях:

1) коэффициент при неизвестном в квадрате не равен нулю;

2) ни один из знаменателей дробей, входящих в данное уравнение, не равен нулю;

3) дискриминант квадратного уравнения неотрицательное число.

При решении примеров следует приучать учащихся проводить исследование корней квадратного уравнения по его коэффициентам и дискриминанту.

390. 1) $\frac{a+b}{2a-ax+2-x}+\frac{1}{a+1}=\frac{b+1}{2x-x^2}$;

2) $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$; 3) $a^2-\frac{a^2-b^2}{2x-x^2}=\frac{b^2(x+2)}{x-2}$;

4) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}=0$.

391. 1) $\frac{a-x}{x-b}-\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; 2) $\frac{2a+m}{a+x}-\frac{2a-m}{a-x}=\frac{2a}{m}$;

3) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{x}=\frac{1}{m+n+x}$;

4) $\frac{a}{bx}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{b(x+2)}{a}-\frac{a(x-2)}{b}$.

392. 1) $\frac{2x(x+1)}{6x+3}-\frac{(a+2)(2-a)}{6a}=\frac{1}{4x+2}$;

2) $\frac{1}{cx+nx}-\frac{1}{ac+an}=\frac{a-x}{2ax^2}$;

3) $\frac{n-p+1}{nx+px}=\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{n-p}{x^2}$;

4) $\frac{1}{ax-cx^2}-\frac{1}{a-c}=\frac{d(x-1)}{a^2-acx-ac+c^2x}$.

§ 21. Свойства корней квадратного уравнения и их исследование.

393. (Устно.) Найти сумму и произведение корней каждого из следующих уравнений:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2-5x+6=0$;
3) $8x^2+2x-3=0$; 4) $3x^2-7x+2=0$;
5) $x^2-6ax+5a^2=0$; 6) $2mx^2+nx-p=0$.

Составить квадратные уравнения по данным корням их:

394. (Устно.) 1) 2 и 3; 2) 6 и -2; 3) -5 и -3; 4) 1 и -2.

395. (Устно.) 1) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$; 2) 0,4 и $-0{,}2$;

3) $2\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{5}{3}$.

396. (Устно.) 1) -1 и -1; 2) 5 и 0;

3) 0 и -1; 4) 5 и -5.

397. 1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{2}$ и $-\sqrt{3}$;

3) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$; 4) -2 и $\sqrt{5}$;

5) $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$; 6) $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$;

7) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 8) $\frac{2+3\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{2-3\sqrt{2}}{3}$.

398. 1) a и b; 2) $\frac{a}{3}$ и $-\frac{a}{2}$;

3) $m+n$ и $m-n$; 4) $\frac{a}{b}$ и $-\frac{b}{a}$.

399. 1) $\frac{a+b}{a-b}$ и 1; 2) $\frac{a}{1-a}$ и $\frac{b}{1-a}$; 3) $\frac{a+b}{a-b}$ и $-\frac{a-b}{a+b}$.

400. 1) $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$; 2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

3) $3m+2n\sqrt{5}$ и $3m-2n\sqrt{5}$; 4) $a+b\sqrt{m}$ и $a-b\sqrt{m}$.

401. 1) Составить квадратное уравнение, корни которого были бы в два раза больше корней уравнения $x^2-5x+6=0$.

2) Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Составить новое квадратное уравнение, корни которого были бы равны корням данного уравнения, умноженным на k.

402. 1) Составить квадратное уравнение, корни которого были бы на два больше корней уравнения $x^2-5x+6=0$.

2) Составить квадратное уравнение, корни которого были бы на $\frac{p}{2}$ больше корней уравнения $x^2+px+q=0$.

403. Составить квадратное уравнение, в котором коэффициент при неизвестном в первой степени равнялся бы (-15) и один корень которого был бы вдвое больше другого.

404. 1) Дано уравнение $x^2-8x+12=0$. Требуется, не решая его, составить новое уравнение, корни которого были бы обратны корням данного уравнения.

2) Составить квадратное уравнение, корни которого были бы обратны корням уравнения: а) $x^2+px+q=0$; б) $ax^2+bx+c=0$.

405. 1) Не решая уравнения $x^2-2x-15=0$, вычислить сумму квадратов его корней.

2) Не решая уравнения $x^2+px+q=0$, выразить через p и q сумму квадратов его корней.

406*. Выразить через p и q:

1) разность квадратов корней уравнения $x^2+px+q=0$;

2) сумму и разность кубов корней уравнения $x^2+px+q=0$.

407. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+3x+m=0$. При каком значении m:

1) разность корней данного уравнения будет равна 6?

2) один из корней уравнения будет равен другому корню, умноженному на 2?

408. В уравнении $x^2-6x+q=0$ найти то значение q, при котором корни его x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению

$$3x_1+2x_2=20.$$

409. В уравнении $3x^2-5x+k=0$ найти то значение k, при котором корни его x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению

$$6x_1+x_2=0.$$

410. При каком значении k уравнение:

1) $x^2+kx+15=0$ будет иметь корень, равный 5?
2) $x^2+kx-24=0$ » » » » -3?
3) $kx^2-15x-7=0$ » » » » 7?
4) $kx^2+12x-3=0$ » » » » $\frac{1}{5}$?
5) $x^2-2ax+k=0$ » » » » $a-b$?
6) $x^2+kx+a^2-b^2=0$ » » » $a+b$?

Разложить на множители следующие трёхчлены:

411. 1) x^2-4x+3; 2) $x^2-10x+9$; 3) $x^2-2x-35$; 4) $x^2-4x-60$.

412. 1) $x^2+7x+10$; 2) $x^2+25x+114$; 3) $a^2-17a+72$; 4) $a^2-29a+198$.

413. 1) m^2-m-56; 2) m^2-m-12; 3) $3x^2-7x-40$; 4) $5x^2+17x-126$.

414. 1) $2a^2-5a+2$; 2) $3a^2-2a-1$; 3) $5m^2+m-4$; 4) $2m^2-m-3$.

415. 1) $x^2-ax-6a^2$; 2) $x^2+ax-2a^2$; 3) $x^2-2ax+(a^2-b^2)$; 4) $x^2-6bx-(4a^2-9b^2)$.

416. 1) $4x^2-4a^2x+a^4-b^4$; 2) $4x^2-20ax+9a^2$;
3) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab$;
4) $(a^2-b^2)x^2-4abx-(a^2-b^2)$.

417. Сократить следующие дроби:

1) $\frac{a^2+6a-91}{a^2+8a-105}$; 2) $\frac{2a^2+8a-90}{3a^2-36a+105}$;

3) $\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}$; 4) $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$.

Не решая следующих уравнений, определить, какие из них имеют два различных корня, два равных корня или не имеют корней (действительных):

418. 1) $x^2-4x+4=0$; 2) $x^2-4x+3=0$; 3) $x^2+7x+15=0$; 4) $x^2-2x+5=0$.

419. 1) $x^2-10x+25=0$; 2) $x^2+16x+48=0$; 3) $x^2-14x+49=0$; 4) $x^2+x-1=0$.

420. 1) $x^2-4x-8=0$; 2) $4x^2+6x+9=0$; 3) $7x^2-x-1=0$; 4) $2x^2-3x+1=0$.

421. 1) $12x-4=x^2$; 2) $4x^2+5=10x$; 3) $4x^2+9x=-2$; 4) $2x^2+3x=2$.

Не решая следующих уравнений, определить знаки корней:

422. 1) $x^2-6x+5=0$; 2) $x^2+4x-5=0$;
3) $x^2+20x+19=0$; 4) $x^2+2x+1=0$.

423. 1) $x^2+9x-22=0$; 2) $x^2-20x-300=0$;
3) $2x^2+5x=-2$; 4) $3x^2+8x=4$.

424. 1) $4x^2+5=10x$; 2) $8x^2-1=2x$;
3) $2x^2+3x=2$; 4) $4x^2+9x+2=0$.

При каких значениях a следующие уравнения имеют по два равных корня:

425. 1) $x^2+ax+9=0$; 2) $x^2+12x+a=0$;
3) $ax^2+4x+1=0$; 4) $9x^2+6x+a=0$.

426. 1) $4x^2+ax+9=0$;
2) $x^2+2(a-4)x+a^2+6a+3=0$;
3) $(2+a)x^2+6ax+4a+1=0$;
4) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$.

427. Показать, что если дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равен нулю, то левая часть этого уравнения есть полный квадрат.

428. Составить приведённое квадратное уравнение, которое имеет: 1) положительные корни; 2) корни с противоположными знаками; 3) равные отрицательные корни.

429*. Один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $1+\sqrt{2}$. Найти второй корень и составить соответствующее уравнение.

§ 22. Задачи на составление квадратных уравнений.

430. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 *м* больше другой, требуется обнести изгородью. Определить длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 *м*^{2}.

431. Высота прямоугольника составляет 75% его основания. Найти периметр этого прямоугольника, зная, что площадь прямоугольника равна 48 *м*^{2}.

432. От нити, равной периметру некоторого квадрата, отрезано с одного конца 36 *см*. Укороченная таким образом нить представляет периметр другого квадрата, площадь которого в $2\frac{1}{4}$ раза меньше площади первого. Определить первоначальную длину нити.

433. От листа жести, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной в 3 *см*, после чего площадь оставшейся части листа стала равна 10 *см*^{2}. Определить первоначальные размеры листа жести.

434. Для перевозки 15 *т* овощей было затребовано несколько грузовиков определённой грузоподъёмности. За неимением свободных грузовиков этой грузоподъёмности гараж выслал грузовики с грузоподъёмностью на полтонны меньше и дал таких грузовиков на один больше. Сколько тонн овощей взял каждый из высланных грузовиков?

435. Колхоз должен был засеять 200 *га* к определённому сроку, но он засевал ежедневно на 5 *га* больше, чем намечалось по плану, и поэтому закончил сев на 2 дня раньше срока. Во сколько дней был закончен сев?

436. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить в несколько дней 216 $м^3$ дров. Первые 3 дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 $м^3$ сверх плана; поэтому уже за день до срока было заготовлено 232 $м^3$ дров. Сколько дров в день должна была заготовлять бригада по плану?

437. В зрительном зале клуба было 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили ещё один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале клуба?

438. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого на 10 *км* в час больше скорости второго, и поэтому первый автомобиль приезжает на место на 1 час раньше второго. Определить скорость того и другого автомобиля, если известно, что расстояние между городами 560 *км*.

439. С аэродрома вылетают одновременно в пункт, отстоящий от него на 1600 *км*, два самолёта. Скорость первого из них на 80 *км* в час больше скорости второго, а потому он прилетает к месту назначения на час раньше второго. Найти скорость каждого самолёта.

440. Пароход прошёл по течению реки 48 *км* и столько же против течения и употребил на весь путь 5 час. Определить скорость парохода в стоячей воде, если считать скорость течения реки 4 *км* в час.

441. Расстояние между двумя пристанями по реке равно 80 *км*. Пароход проходит этот путь туда и обратно за 8 час. 20 мин. Определить скорость парохода в стоячей воде, считая скорость течения реки равной 4 *км* в час.

442. Лодка против течения прошла $22\frac{1}{2}$ *км* и по течению $28\frac{1}{2}$ *км*, затратив на весь путь 8 час. Скорость течения реки $2\frac{1}{2}$ *км* в час. Определить скорость движения лодки в стоячей воде.

443. Из пункта A отправили по течению реки плот. Через 5 час. 20 мин. вслед за плотом из того же пункта вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 *км*. Сколько километров в час проходил плот, если моторная лодка шла быстрее его на 12 *км* в час?

444. Расстояние по реке от одной пристани до другой, равное 30 *км*, моторная лодка проходит туда и обратно за 6 час., затрачивая из этого времени 40 мин. на остановки в пути. Найти собственную скорость моторной лодки (то есть скорость её в стоячей воде), если скорость течения реки равна 3 *км* в час.

445. Две бригады комсомольцев, работая совместно, закончили посадку деревьев на учебно-опытном участке за 4 дня. Сколько дней потребовалось бы на выполнение этой работы каждой бригаде отдельно, если одна из бригад могла бы закончить посадку деревьев на 6 дней скорее другой?

446. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 часа 55 мин. Первая труба может наполнить его на 2 часа скорее, чем вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бак?

447. Две молотилки обмолачивают собранную пшеницу за 4 дня. Если бы одна из них обмолотила половину всей пшеницы, а затем вторая остальную часть, то вся работа была бы окончена за 9 дней. За сколько дней каждая молотилка в отдельности могла бы обмолотить всю пшеницу?

448. Двое рабочих, выполняя определённое задание вместе, могли бы закончить его за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а когда он выполнит половину всей работы, его сменит второй рабочий, то всё задание будет закончено за 25 дней. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может выполнить всё задание?

449. Два каменщика, из которых второй начинает работу $1\frac{1}{2}$ днями позже первого, могут выложить стену за 7 дней. За сколько дней каждый из них отдельно мог бы выложить эту стену, если известно, что второй каменщик может выполнить эту работу на 3 дня скорее, чем первый?

450. За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано $\frac{2}{3}$ колхозного поля. За сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать всё поле на 5 дней скорее, чем вторым трактором?

451. С аэродрома одновременно вылетают два самолёта: один по направлению на юг со скоростью 192 *км* в час, а другой по направлению на восток со скоростью 256 *км* в час. На каком расстоянии друг от друга будут находиться самолёты через 3 часа?

452. Из порта одновременно вышли два парохода: один на север, а другой на восток. Через 2 часа расстояние между ними оказалось равным 60 *км*. Найти скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 *км* в час больше скорости другого.

453. Цена ткани была снижена на столько процентов, сколько рублей стоил метр ткани до снижения цен. На сколько процентов была снижена цена на ткань, если метр этой ткани стали продавать по 16 руб.?

454. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена фотоаппарата упала с 300 руб. до 192 руб. На сколько процентов снижалась цена фотоаппарата каждый раз?

455. Население города за два года увеличилось с 20 000 человек до 22 050 человек. Найти средний ежегодный процент роста населения этого города.

456. Кооператив купил на некоторую сумму товар и продал его с наценкой в 100 руб. На вырученные деньги кооператив купил новый товар, который продал за 1210 руб., сделав на этот товар столько же процентов наценки, сколько и в первый раз. На какую сумму кооператив купил товара в первый раз?

457. При розыгрыше первенства по футболу было сыграно 55 матчей, причём каждая команда играла с каждой из остальных команд по одному разу. Сколько команд участвовало в розыгрыше?

458. Если каждый участник шахматного турнира сыграет по одной партии с каждым из остальных участников, то всего будет сыграно 231 партия. Сколько участников турнира?

459. Учащиеся выпускного класса обмениваются своими фотографическими карточками. Сколько было учащихся, если для обмена потребовалось 870 фотографических карточек?

460. Через несколько точек, расположенных на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, проведены все прямые, соединяющие эти точки попарно. Определить, сколько было точек, если число проведённых прямых оказалось равным 45.

461. В выпуклом многоугольнике проведены всевозможные диагонали; оказалось, что их всего 14. Сколько сторон у этого многоугольника?

462. Какой многоугольник имеет число диагоналей на 12 больше числа его сторон?

463. В середине прямоугольной площадки со сторонами 12 *м* и 10 *м* требуется разбить прямоугольную клумбу площадью в 8 $м^2$ так, чтобы её края были на одинаковом расстоянии от краёв площадки. На каком расстоянии от края площадки должен быть расположен край клумбы?

464. В крышке ящика, имеющей форму прямоугольника длиной 30 *см* и шириной 20 *см*, требуется вырезать прямоугольное отверстие площадью в 200 $см^2$ так, чтобы края его были везде на одинаковом расстоянии от краёв крышки. На каком расстоянии от края крышки должен быть расположен край отверстия?

465. Фотографическая карточка размерами 12 *см* $\times$ 18 *см* имеет рамку одинаковой ширины. Определить ширину рамки, если её площадь равна площади карточки.

466. По плану тракторист должен в течение двух дней вспахать прямоугольный участок земли, длина которого 400 *м*, а ширина 300 *м*. Тракторист начал пахоту с краёв участка, двигаясь кругом по периметру непропаханной части, постепенно приближаясь к середине. На каком расстоянии от края участка должен остановиться тракторист, вспахав половину участка?

467. Клумба, имеющая форму прямоугольника со сторонами 2 *м* и 4 *м*, окружена дорожкой, имеющей везде одинаковую ширину. Определить ширину этой дорожки, если её площадь в 9 раз больше площади клумбы.

468. Из листа жести, имеющего форму прямоугольника, приготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной в 5 *см* и получившиеся края загнуты. Какого размера был лист жести, если длина его вдвое больше ширины и если объём коробки оказался равным 1500 $см^3$?

469. Из сосуда, вмещающего 20 *л* и наполненного спиртом, отлили некоторое количество спирта и долили сосуд водой; потом отлили такое же количество смеси и снова долили водой. Тогда в сосуде осталось 5 *л* чистого спирта. По скольку литров жидкости отливали каждый раз?

470. Из двух городов, расстояние между которыми 900 *км*, отправляются навстречу друг другу два поезда и встречаются на середине пути. Определить скорость каждого поезда, если первый вышел на 1 час позднее второго и со скоростью, на 5 *км* в час большей, чем скорость второго поезда.

471. Два поезда выходят из двух городов, расстояние между которыми равно 360 *км*, и идут навстречу друг другу. Они могут встретиться на середине пути, если второй поезд выйдет со станции на 1,5 часа раньше первого. Если же они выйдут со станции одновременно, то через 5 час. расстояние между ними будет равно 90 *км*. Найти скорость каждого поезда.

472. Два автомобиля вышли одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Через час автомобили встретились и, не останавливаясь, продолжали путь с той же скоростью. Первый прибыл в B на 27 мин. позже, чем второй прибыл в город A. Определить скорость каждого автомобиля, если известно, что расстояние между городами 90 *км*.

473. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 *км*, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью, и первый прибывает в пункт B на 35 мин. скорее, чем второй в пункт A. Определить скорость каждого велосипедиста.

474. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 24 *км*, отправлены в одно и то же время два автомобиля навстречу друг другу. После их встречи автомобиль, вышедший из A, приходит в B через 16 мин., а другой автомобиль приходит в A через 4 мин. Определить скорость каждого автомобиля.

475. С двух аэродромов вылетают одновременно навстречу друг другу вертолёт и учебный самолёт. К моменту встречи вертолёт прошёл на 100 *км* меньше самолёта. Остальной путь самолёт покрывает за 1 час 20 мин., а вертолёт за 3 часа. Найти расстояние между аэродромами и скорость самолёта и вертолёта.

476. Два туриста выходят одновременно навстречу друг другу из двух мест: A и B. При встрече оказывается, что первый прошёл на 4 *км* меньше второго. Продолжая движение с той же скоростью, первый приходит в B через 4 часа 48 мин. после встречи, а второй приходит в A через 3 часа 20 мин. после встречи. Найти расстояние от A до B.

477. Два туриста идут друг другу навстречу: один из пункта A, другой из B. Первый выходит из A на 6 час. позже, чем второй из B, и при встрече оказывается, что он прошёл на 12 *км* меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в B через 8 час., а второй в A через 9 час. Определить расстояние от A до B и скорость каждого туриста.

478. Поезд был задержан в пути на 6 мин. и ликвидировал опоздание на перегоне в 20 *км*, пройдя его со скоростью, на 10 *км* в час больше той, которая полагалась по расписанию. Определить скорость поезда на этом перегоне по расписанию.

479. На середине пути между станциями A и B поезд был задержан на 10 мин. Чтобы прийти в B по расписанию, машинисту пришлось первоначальную скорость поезда увеличить на 6 *км* в час. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями равно 60 *км*.

480. Паровоз, пройдя первый перегон в 24 *км*, был задержан некоторое время, а потому следующий перегон проходил со скоростью, большей прежней на 4 *км* в час. Несмотря на то, что второй перегон был длиннее первого на 15 *км*, паровоз прошёл его за время, только на 20 мин. большее, чем потребовалось на прохождение первого перегона. Определить первоначальную скорость паровоза.

481. Поезд должен был пройти 840 *км*. В середине пути он был задержан на 30 мин., и поэтому, чтобы прибыть вовремя, он должен был увеличить скорость на 2 *км* в час. Сколько времени поезд затратил на весь путь?

482. Из двух пунктов A и C выехали одновременно два связных в пункт B. Первый прибыл в B через 3 часа, а второй, чтобы прибыть в B одновременно с первым, должен был проезжать каждый километр на $\frac{3}{4}$ мин. скорее первого, так как расстояние от C до B на 12 *км* больше расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B и скорость каждого связного.

483. Для посева нового сорта кукурузы колхоз выделил два опытных участка земли. На первом участке, площадь которого была на 2 *га* меньше площади второго участка, кукуруза была посеяна квадратно-гнездовым способом. При уборке урожая с каждого из этих участков было собрано по 180 *т* кукурузы. Сколько тонн кукурузы было собрано с одного гектара на каждом участке, если урожай кукурузы на первом участке был на 3 *т* с гектара больше, чем на втором?

484. Для уборки урожая в определённый планом срок колхоз выделил две бригады. Первая бригада, работавшая на участке в 400 *га*, окончила уборку урожая на 2 дня раньше срока, а вторая бригада на участке в 900 *га* проработала на 2 дня дольше срока. Если бы первая бригада работала столько дней, сколько вторая, а вторая столько дней, сколько первая, то каждая бригада убрала бы поровну. Найти срок уборки урожая по плану и производительность труда каждой бригады в день.

485. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, равен 9,6 *м*; разность отрезков гипотенузы равна 5,6 *м*. Найти длину гипотенузы.

486. Если диаметр круга увеличить на 3 *м*, то площадь круга удвоится. Найти первоначальный диаметр круга с точностью до 0,01 *м*.

487. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, причём внешний отрезок секущей на 9 *см* меньше касательной. Найти длину секущей и касательной, если сумма их равна 84 *см*.

488. Одна из двух сил, приложенных под прямым углом, на 4 *кГ* больше другой, а равнодействующая их на 8 *кГ* меньше, чем сумма этих сил. Найти величину составляющих сил.[1)]

489. Каждой из двух масс воды, отличающихся друг от друга на 2 *кг*, сообщили одинаковое количество тепла, равное 96 *ккал*, причём оказалось, что бóльшая масса воды нагрелась на 4° меньше, чем меньшая. Определить каждую из двух масс воды.

490. Одинаковое количество тепла, равное 60 *ккал*, сообщено каждой из двух масс воды, отличающихся друг от друга на 3 *кг*, причём оказалось, что бóльшая масса воды нагрелась на 1° меньше, чем меньшая. Найти, на сколько градусов нагрелась при этом меньшая масса воды.

491. Из двух кусков металла первый весит 880 *Г*, а второй 858 *Г*, причём объём первого куска на 10 $см^3$ меньше объёма второго. Найти удельный вес каждого металла, если удельный вес первого на 1 $\frac{Г}{см^3}$ больше удельного веса второго.

[1)] *кГ* (килограмм-сила) и *Г* (грамм-сила) — единицы измерения системы МКГСС.

492. Смешав 8 Γ жидкости с 6 Γ жидкости меньшей плотности, получили смесь с удельным весом $0{,}7\frac{\Gamma}{см^3}$. Найти удельный вес каждой жидкости, если удельный вес одной из них на $0{,}2\frac{\Gamma}{см^3}$ больше удельного веса другой.

493. Из двух кусков металла один весит 178 Γ, а другой 219 Γ, причём удельный вес первого на $1{,}6\frac{\Gamma}{см^3}$ больше удельного веса второго. Найти объём каждого куска, если объём первого куска на 10 $см^3$ меньше объёма второго куска.

494. К раствору, содержащему 40 *г* соли, добавили 200 *г* воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

495. Спортивная площадка прямоугольной формы имеет площадь, равную 720 *кв. м.* Если длину площадки увеличить на 6 *м*, а ширину уменьшить на 4 *м*, то получится прямоугольник, равновеликий первому. Найти длину и ширину спортивной площадки.

496. Звук от падения камня на дно шахты долетел до наблюдателя через 4 сек. после начала падения. Определить глубину шахты, принимая скорость звука равной 330 *м* в сек., а путь s свободно падающего тела равным $s=\frac{gt^2}{2}$, где $g\approx 10\frac{м}{сек^2}$.

497. Через сколько секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 60 *м* в сек., достигнет высоты в 100 *м*? (Ускорение свободного падения считать приближённо равным $10\frac{м}{сек^2}$.)

498. Поезд шёл со скоростью 36 *км* в час, затем на перегоне, равном 1,5 *км*, поезд шёл равноускоренно с ускорением $0{,}1\frac{м}{сек^2}$. Найти время, в течение которого поезд прошёл перегон в 1,5 *км*.

Старинные задачи.

Индусские задачи из Бхаскары (1114 г.).

499. На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась;
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в роще?

500. Квадрат пятой части обезьян, уменьшенной на 3, спрятался в гроте; одна обезьяна, влезшая на дерево, была видна. Сколько было обезьян?

501. Цветок лотоса возвышался над поверхностью пруда на 4 фута; под напором ветра он скрылся под водой на расстоянии 16 футов от того места, где он раньше поднимался над водой. Какой глубины был пруд?

502. На самом берегу ручья растёт тополь. Порыв ветра сломил его на высоте трёх единиц длины от земли, и он упал перпендикулярно к направлению ручья, ширина которого равна четырём единицам длины; при падении дерево упёрлось в край противоположного берега. Как высок был тополь?

Из старинного руководства (1200 г.).

503. Две башни в равнине находятся на расстоянии 60 локтей одна от другой. Высота одной 50 локтей, высота другой 40 локтей. Между башнями находится колодец, одинаково удалённый от вершины обеих башен. Спрашивается: как далеко находится колодец от основания каждой башни?

Из арифметики Магницкого (1703 г.).

504. Случися некоему человеку к стене лествицу прибрати, стены же тоя высота 117 стоп. И обрете лествицу долготою 125 стоп. И ведати хощет, колико стоп сея лествицы нижний конец от стены отстояти имать.

В следующих задачах с буквенными данными следует при исследовании решения определить: 1) при каких значениях букв, входящих в условие задачи, и при каких соотношениях между ними задача имеет смысл; 2) какие значения может принимать выбранное для составления уравнения неизвестное, чтобы оно удовлетворяло условию задачи; 3) какой из найденных корней уравнения удовлетворяет этим условиям и будет пригоден для ответа на вопрос задачи.

505. Турист прошёл c километров и нашёл, что если бы он на это путешествие употребил времени на 6 дней больше, то мог бы в день проходить на 2 *км* меньше, чем проходил. Сколько километров он проходил в день?

506. Для перевозки a тонн груза выделены автомашины. Вследствие того, что две из них были использованы на другой работе, на каждую машину погрузили на 1 *т* больше, чем предполагалось. Сколько автомашин было занято перевозкой груза?

507. На a рублей куплены книги. Если бы на эти деньги купили на 4 книги меньше, то каждая книга стоила бы одним рублём дороже. Сколько куплено книг?

508. Куплено m яблонь с целью посадить на каждую делянку по равному количеству. Но делянок оказалось на 2 больше, а потому на каждую из них пришлось посадить на 3 яблони меньше, чем предполагалось. Сколько было делянок фактически?

509. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за t часов, причём один первый, работая отдельно, может выполнить её на 4 часа скорее второго. За сколько времени может выполнить эту работу каждый из них, работая один?

510. Два туриста выходят одновременно из деревни в город, находящийся от них на расстоянии s километров. Первый турист проходит в час одним километром более второго и прибывает в город на один час раньше его. Определить скорость каждого туриста.

511. На s рублей куплено несколько килограммов товара; если бы каждый килограмм стоил на m рублей дороже, то на ту же сумму можно было бы купить на n килограммов меньше. Сколько килограммов товара было куплено?

512. Расстояние между двумя станциями железной дороги равно d километрам. Скорый поезд проходит это расстояние на t часов скорее, чем пассажирский поезд. Определить скорости обоих поездов, если известно, что скорый поезд проходит в час на a километров больше, чем пассажирский.

513. Путь длиной в n километров автомобиль проходит с определённой скоростью. Если эту скорость уменьшить на a *км* в час, то на прохождение всего пути будет затрачено на b часов больше. Найти скорость автомобиля.

514. Расстояние между двумя аэродромами A и B равно d километрам. Из A в B вылетает первый самолёт, а через m часов навстречу ему вылетает второй самолёт со скоростью, на b *км* в час большей первого. Встреча их произошла на середине пути. Определить скорость каждого самолёта.

515. Двум рабочим поручено было сделать по a штук изделий каждому. Первый рабочий делал в час на b штук больше, чем второй, а потому и окончил работу на c часов ранее второго. Сколько изделий делал каждый рабочий в час?

516. Переднее колесо трактора делает на расстоянии s метров на k оборотов более заднего. Найти длину окружности каждого колеса, если окружность заднего на t метров более окружности переднего.

517. Двое рабочих могут окончить некоторую работу в m часов; если бы они работали отдельно, то первый мог бы окончить эту работу на a часов скорее второго. Во сколько часов может окончить эту работу каждый рабочий отдельно?

518. Чтобы сложить стену, два каменщика работали вместе c дней, и сверх того первый работал ещё b дней. Сколько дней требуется каждому из них отдельно для выполнения всей работы, если второй каменщик может сложить эту стену на a дней скорее, чем первый?

519. При совместной работе двух тракторов различной мощности колхозное поле было вспахано в t дней. Если бы половину поля вспахать сначала одним трактором, а затем другую половину вторым трактором, то вся работа была бы закончена в k дней. Во сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором отдельно?

520. Расстояние между двумя пристанями по реке равно d километрам. Пароход проходит это расстояние туда и обратно за t часов. Определить скорость парохода в стоячей воде, считая скорость течения реки равной v *км* в час.

521. Самолёт пролетел по прямой линии n километров, двигаясь по ветру, и тотчас же повернул назад и по прямой линии вернулся к начальному месту через t часов после начала полёта. Какова была скорость ветра, если собственная скорость самолёта равна v *км* в час?

522. Разность катетов прямоугольного треугольника равна r, а гипотенуза его равна c. Найти катеты.

523. Колхоз заготовил на зиму для скота p тонн кормов. Но число голов скота увеличилось на a, вследствие этого норма выдачи данного корма на голову скота была уменьшена на b тонн. Сколько тонн кормов предполагалось расходовать на голову скота первоначально?

524. Из сосуда, вмещающего a литров и наполненного спиртом, отлили некоторую часть и вместо спирта сосуд долили водой; потом опять отлили такое же количество смеси и снова долили водой, после чего в сосуде осталось спирта b литров. По скольку литров жидкости отливали каждый раз?

525. Поезд должен был пройти a километров в определённое время, но был задержан на станции лишних 30 мин. Чтобы пройти весь путь в назначенное время, он увеличил скорость на b *км* в час. Найти первоначальную скорость поезда.

526. Мотоцикл был задержан у шлагбаума на t минут и наверстал опоздание на перегоне в a километров, увеличив свою скорость на d *км* в час. Определить скорость мотоцикла до задержки у шлагбаума.

527. На середине пути между станциями A и B поезд был задержан на t минут. Чтобы прийти в B по расписанию, пришлось увеличить скорость поезда на a *км* в час. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями A и B равно d километрам.

528. Турист должен прийти в назначенный срок в город B из города A, расстояние между которыми равно s километрам. Пройдя половину всего пути от A до B, турист подсчитал, что опоздает на 2 часа, если будет идти далее с той же скоростью, а если он на половине всего пути отдохнёт 1 час, а затем будет проходить на v *км* в час более прежнего, то придёт в город B в назначенный срок. Сколько километров в час проходил турист первоначально?

529. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми d километров, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с прежней скоростью, и первый прибывает в пункт B на t часов скорее, чем второй в пункт A. Определить скорость каждого велосипедиста.

§ 23. Биквадратные уравнения.

Решить уравнения:

530. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;
3) $x^4-29x^2+100=0$; 4) $x^4-5x^2+4=0$.

531. 1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $x^4-37x^2+36=0$;
3) $x^4-50x^2+49=0$; 4) $x^4-25x^2+144=0$.

532. 1) $4x^4-5x^2+1=0$; 2) $3x^4-28x^2+9=0$;
3) $2x^4-19x^2+9=0$; 4) $3x^4-7x^2+2=0$.

533. 1) $a^2b^2x^4=b^4x^2-a^2b^2+a^4x^2$;
2) $x^4-25x^2=m^2x^2-25m^2$;
3) $x^4+9n^2=n^5x^2+9x^2$;
4) $4x^4+a^2=x^2+4a^2x^2$.

534. Решить уравнения способом введения вспомогательного неизвестного:

1) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$;
2) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$;
3) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)-4=0$;
4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4{,}5\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$.

535. Доказать, что сумма всех корней биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$ равна нулю, а произведение корней равно q.

536. Разложить на множители многочлены:

1) x^4-5x^2+4; 2) x^4-13x^2+36;
3) x^4-125x^2+484; 4) $4x^4-5x^2+1$.

537. Сократить дроби:

1) $\frac{x^4-10x^2+9}{x^4-13x^2+36}$; 2) $\frac{x^4-9x^2+20}{x^4-10x^2+24}$;
3) $\frac{x^4-17x^2+16}{x^4-50x^2+49}$; 4) $\frac{a^4-4a^2+3}{a^4-12a^2+27}$.

538. Составить биквадратное уравнение по данным его корням:

1) ± 2; ± 3; 2) ± 1; ± 6;
3) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{2}$; 4) $\pm\frac{2}{3}$; ± 4.

539. Один из корней биквадратного уравнения равен 3, а другой корень 4. Составить уравнение.

§ 24. Иррациональные уравнения [1]).

540. Не решая следующих уравнений, объяснить, почему каждое из них не может иметь корней:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=0$; 2) $\sqrt{2x-1}=-5$;
3) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-1}=-3$; 4) $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}=-1$.

541. Определить область допустимых значений неизвестного следующих уравнений:

1) $\sqrt{x-4}=3$; 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$;
3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=3$; 4) $\sqrt{3x-6}+\sqrt{1+x}=2$.

542. Не решая следующих уравнений, объяснить, почему каждое из них не может иметь корней:

1) $\sqrt{x-8}-\sqrt{5-x}=3$; 2) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}=5$;
3) $\sqrt{x}-\sqrt{-2-x}=1$; 4) $\sqrt{5-x}+7=2$.

Решить уравнения:

543. 1) $\sqrt{x-1}=2$; 2) $3+\sqrt{x-2}=4$;
3) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$.

544. 1) $(2x+7)^{\frac{1}{3}}=(3x-3)^{\frac{1}{3}}$;

2) $(x+2)^{\frac{1}{3}}=3(x-1)^{\frac{1}{3}}$;

3)* $(25+\sqrt{x-4})^{\frac{1}{5}}=2$; 4)* $(70+\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{4}}=3$.

545. 1) $\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$;

2) $\sqrt{x-9}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}$;

3) $3\sqrt{2x-1}-\sqrt{8x+17}=\frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-1}}$;

4) $5\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$.

546. 1) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\frac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$; 2) $\frac{2\sqrt{x}-1}{3(\sqrt{x}+2)}=\frac{2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}-2}$;

3) $\frac{3\sqrt{x}-4}{4(\sqrt{x}-2)}=\frac{3\sqrt{x}-5}{4\sqrt{x}-9}$; 4) $\frac{9\sqrt{x}+1}{6(6\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-1}$.

---

[1]) Ответы к примерам на решение иррациональных уравнений даны при условии, что под значением радикала чётной степени понимается его арифметическое значение.

547. 1) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$;

2) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$;

3) $\sqrt{4x-3}=\frac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$; 4) $\frac{7x-2}{\sqrt{3x-8}}=3\sqrt{2x+3}$.

548. 1) $\frac{15}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{3x+5}=\sqrt{10-x}$;

2) $\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$;

3) $\sqrt{3x-1}+\frac{2}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x+3}$;

4) $\sqrt{2x+15}-\frac{10}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}$.

549. 1) $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$;

2) $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}$;

3) $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}=\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$;

4) $\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x}{3}}+\sqrt{\frac{x}{3}}}-\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x}{3}}-\sqrt{\frac{x}{3}}}+6=0$.

550. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$;

2) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$;

3) $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}-9=0$;

4) $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$.

551. 1) $(x+7)^{\frac{1}{2}}=(3x+19)^{\frac{1}{2}}-(x+2)^{\frac{1}{2}}$;

2) $(5x+4)^{\frac{1}{2}}+(2x-1)^{\frac{1}{2}}=(3x+1)^{\frac{1}{2}}$;

3) $(3x+1)^{\frac{1}{2}}+(4x-3)^{\frac{1}{2}}=(5x+4)^{\frac{1}{2}}$;

4) $[5(x-1)]^{\frac{1}{2}}-(2x-3)^{\frac{1}{2}}=(3x-2)^{\frac{1}{2}}$.

При решении следующих уравнений использовать формулы:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b);$$
$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

552*. 1) $(8x+4)^{\frac{1}{3}} - (8x-4)^{\frac{1}{3}} = 2;$

2) $(5+x)^{\frac{1}{3}} + (5-x)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}};$

3) $(76+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}} + (76-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}} = 8;$

4) $(5+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}} + (5-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}.$

При решении следующих уравнений использовать введение вспомогательного неизвестного:

553. 1) $x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} - 3 = 0;$ 2) $(x-3)^{\frac{1}{2}} + 6 = 5(x-3)^{\frac{1}{4}};$

3) $x^2 + (x^2-9)^{\frac{1}{2}} = 21.$

Указание: $(x^2-9) + (x^2-9)^{\frac{1}{2}} = 21 - 9.$

4) $3x^2 + 15x + 2(x^2+5x+1)^{\frac{1}{2}} = 2.$

554. 1) $x^2 - 3x + (x^2-3x+5)^{\frac{1}{2}} = 7;$

2) $x^2 - 7x + (x^2-7x+18)^{\frac{1}{2}} = 24;$

3) $x^2 + 3x + 4(x^2+3x-6)^{\frac{1}{2}} = 18.$

Решить следующие буквенные иррациональные уравнения:

555. 1) $\sqrt{x-2} = a$ при $a > 0;$

2) $\sqrt{x-1} = a - 1$ при $a > 1;$

3) $\dfrac{a\sqrt{x}+b}{a-b\sqrt{x}} = \dfrac{a+b}{a-b}$ при $a \neq b.$

556. 1) $\dfrac{a\sqrt{x}+b}{a\sqrt{x}+b-2a} = \dfrac{b\sqrt{x}+a}{b\sqrt{x}-a}$ при $a \neq 0;$ $a \neq b;$

2) $\sqrt{a-x} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$ при $a > 0;$

3) $\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a-b}$ при $a > 0,$ $a > b;$

4) $x + \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

ГЛАВА IV.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ. ТРЁХЧЛЕН ВТОРОЙ СТЕПЕНИ[1]).

§ 25. Функция $y = ax^2$ и её график.

557. Автомобиль движется равномерно ускоренно с ускорением $a = 0{,}8 \frac{м}{сек^2}$.

1) Найти путь автомобиля за t секунд, пользуясь формулой $s = \frac{at^2}{2}$, где s — путь в метрах, a — ускорение в $\frac{м}{сек^2}$ и t — время в секундах. Заполнить таблицу значений s в зависимости от следующих значений t:

Время t в секундах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Путь s в метрах	0										

2) Доказать, что отношение любых двух значений s равно квадрату отношения соответствующих значений t.

3) Начертить график изменения пути s в зависимости от изменения времени движения t.

4) Определить по графику путь автомобиля за 1,5 сек.; 2,5 сек.; 5,5 сек.

5) Определить по графику время, в течение которого автомобиль прошёл путь в 5 *м*; 8 *м*; 12 *м*.

6) Привести примеры величин, зависимость между которыми выражалась бы функцией вида $y = ax^2$.

---

[1]) Работу следует начать с повторения главы I, § 5 „Функциональная зависимость и способы её выражения“.

558. Дана функция $y = x^2$.

1) Вычислить значения y при следующих значениях x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

2) Какие значения может принимать x?

3) Какие значения может принимать y?

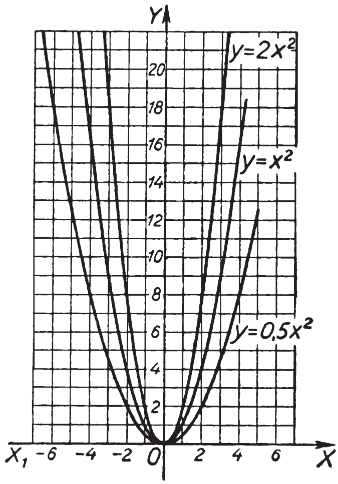
4) Как изменяется функция y, если: а) аргумент x увеличивается от $-\infty$ до 0? б) аргумент x увеличивается от 0 до $+\infty$?

5) При каком значении x функция y принимает наименьшее значение? Принимает ли данная функция наибольшее значение при каком-либо значении x?

6) Начертить график изменения функции y в зависимости от изменения аргумента x.

7) Найти по графику значение y при x, равном 0,5; 2,5; 3,5; $-1,5$; $-2,5$; $-3,5$. Проверить найденные значения y вычислением.

8) Как расположена парабола $y = x^2$ относительно осей координат?



Черт. 15.

559. Даны функции: $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 0{,}5x^2$.

1) Вычислить значения y для каждой из данных функций, заполнив следующую таблицу:

y \ x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$y = x^2$													
$y = 2x^2$													
$y = 0{,}5x^2$													

2) Начертить при одних и тех же осях координат и в одном и том же масштабе график каждой функции (черт. 15).

3) Сравнить значение y каждой из данных функций при одном и том же значении x и установить, как изменяется форма параболы $y=ax^2$ при изменении коэффициента a.

4) Как изменяется каждая из данных функций при изменении аргумента x от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$?

5) При каком значении x каждая из данных функций имеет наименьшее значение (минимум) и какое именно?

560. 1) Используя указания и вопросы предыдущей задачи, исследовать изменение каждой из следующих функций:

$$y=-x^2; \quad y=-2x^2; \quad y=-0{,}5x^2.$$

2) Как изменяется положение параболы $y=ax^2$ относительно осей координат в зависимости от знака коэффициента a?

§ 26. Функция $y=ax^2+b$ и её график.

561. С вертолёта, находящегося в покое на высоте 180 *м*, падает на землю вертикально вниз вымпел. Определить, на какой высоте h находился вымпел в различные моменты времени от начала падения, зная, что h вычисляется по формуле:

$$h=180-\frac{gt^2}{2},$$

где h — искомая высота в метрах, g — ускорение силы тяжести, равное приближённо $10\frac{м}{сек^2}$, t — время падения в секундах.

1) Составить таблицу значений h при следующих значениях t:

t	0	1	2	3	4	5	6
h							

2) Построить график изменения h в зависимости от изменения t.

3) Установить по графику, в какой момент вымпел упадёт на землю.

4) Установить область определения функции h и область её изменения.

5) Найти по графику, через сколько секунд от начала падения вымпел будет находиться на высоте 120 *м*.

562. 1) Построить при одних и тех же осях координат и в одном и том же масштабе графики функций:

$$y=x^2; \quad y=x^2+2 \quad \text{и} \quad y=x^2-2.$$

2) Сравнить значение y каждой из данных функций при одном и том же значении x и выяснить, чем отличается распо-

ложение относительно осей координат графиков функций

$$y=x^2+2 \quad \text{и} \quad y=x^2-2$$

от графика функции $y=x^2$ (черт. 16).

3) Установить, при каком значении x каждая из данных функций имеет наименьшее значение.

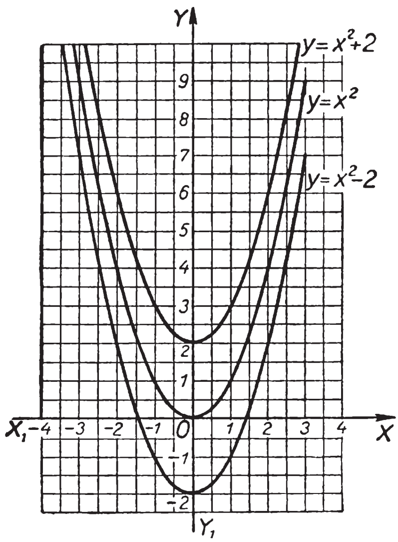
4) Установить область определения каждой из данных функций.

5) Как изменяется каждая из данных функций, если:

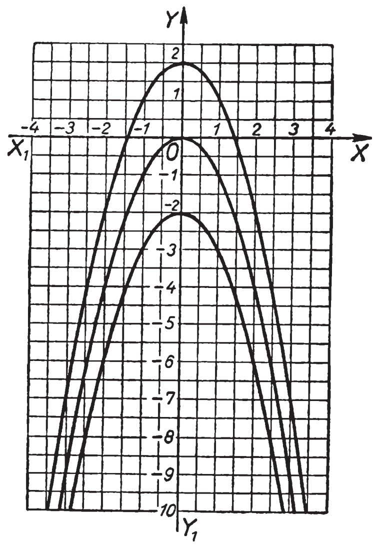
аргумент x увеличивается от $-\infty$ до 0;

аргумент x увеличивается от 0 до $+\infty$.

563. Даны функции: $y=-x^2$; $y=-x^2+2$ и $y=-x^2-2$. Построить при одних и тех же осях координат и в одном и том же масштабе графики данных функций и исследовать изменение функций, используя указания и вопросы предыдущей задачи (черт. 17).



Черт. 16.



Черт. 17.

564. Парабола $y=x^2$ перемещена параллельно самой себе на 4 единицы вниз.

1) Написать уравнение полученной параболы и построить её.

2) Найти точки пересечения параболы с осью x.

565. 1) Как надо сместить параболу $y=x^2$, чтобы новое уравнение параболы было:

$$y=x^2+1; \quad y=x^2-1; \quad y=-x^2+5; \quad y=-x^2-1.$$

2) В каждом случае начертить (при одних и тех же осях координат и в одном и том же масштабе) схематический график функции и определить те значения x, при которых функция имеет наименьшее значение (минимум) или наибольшее значение (максимум).

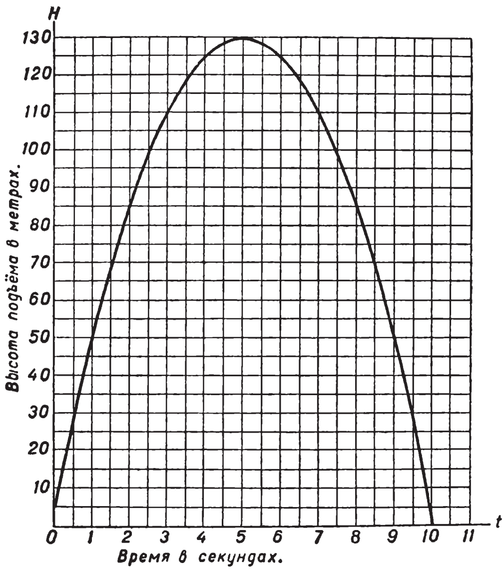
§ 27. Квадратный трёхчлен и его график.

566. С высоты 5 *м* выпущена из лука вертикально вверх стрела с начальной скоростью 50 *м* в сек.

1) Составить таблицу изменения высоты полёта стрелы в зависимости от изменения времени от начала её движения до падения на землю, пользуясь формулой: $H = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$, где H — высота стрелы в метрах, t — время движения в секундах, $g \approx 10 \frac{м}{сек^2}$ — ускорение силы тяжести.

2) Построить график изменения высоты стрелы, откладывая по горизонтальной оси значения t, а по вертикальной оси значения H (черт. 18).

t	H
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	



Черт. 18.

3) Найти по графику и проверить вычислением:

а) Через сколько секунд от начала движения стрела упадёт на землю?

б) Через сколько секунд стрела достигнет наибольшей высоты?

в) На сколько метров от земли поднялась стрела в наивысшей точке подъёма?

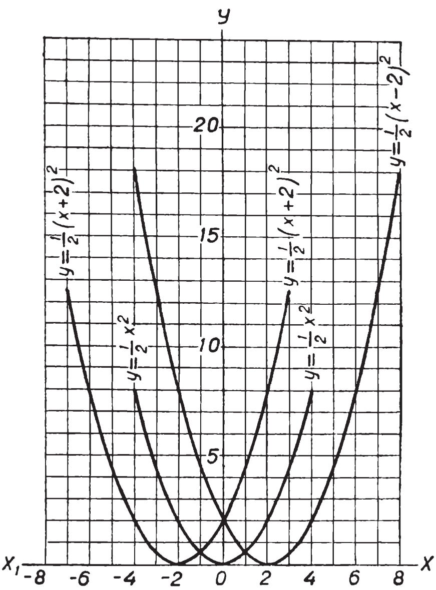
567. 1) При одних и тех же осях и в одном и том же масштабе построить графики функций (черт. 19):

$$y = \frac{1}{2}x^2; \quad y = \frac{1}{2}(x-2)^2 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{2}(x+2)^2,$$

составив следующую таблицу частных значений функций:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\frac{1}{2}x^2$									
$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$									
$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$									

2) Найти на графиках (черт. 19) точку каждой из кривых, имеющую ординату, равную 8, и убедиться, что соответствующая абсцисса точки графика $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ будет на 2 больше, а абсцисса точки графика $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ на 2 меньше абсциссы точки графика $y=\frac{1}{2}x^2$. Проверить это свойство данных кривых графически и вычислением для любых точек с равными ординатами.



Черт. 19.

3) Выяснить различие в расположении графиков данных функций относительно осей координат.

4) Найти координаты вершины каждой параболы и выяснить, каким перемещением параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ получена парабола $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ и парабола $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$.

5) Определить по графикам, при каких значениях x каждая из функций убывает; возрастает; принимает наименьшее значение.

568. Даны функции: а) $y=-\frac{1}{4}x^2$; б) $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$; в) $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$.

Построить графики этих функций и исследовать их, используя указания и вопросы задачи 567.

569. Дана функция:

$$y=(x-4)^2.$$

Не вычерчивая графика этой функции, описать:

1) вид и положение кривой относительно осей координат;

2) будет ли функция иметь наибольшее или наименьшее значение, какое именно и при каком значении x;

3) при каких значениях x функция y убывает; возрастает; обращается в 0;

4) в какой точке пересечёт данная кривая ось y;

5) ответить на вопросы 1—4 при следующих данных:

а) $y=-(x+5)^2$;
б) $y=2(x-1)^2$;
в) $y=-3(x-6)^2$.

570. Дана функция:

$$y=x^2-4x+4.$$

1) Представить правую часть уравнения в виде квадрата двучлена.

2) Доказать, что при любых значениях x функция y не имеет отрицательных значений.

3) Выяснить, при каких значениях x функция y убывает; возрастает; имеет наименьшее или наибольшее значение; обращается в нуль.

4) Построить график данной функции, определив предварительно вычислением координаты нескольких точек (например, точку наименьшего или наибольшего значения функции, точки пересечения графика с осями координат и т. д.).

571. Пользуясь указаниями предыдущей задачи, исследовать квадратные трёхчлены и построить их графики:

1) $y=x^2+2x+1$; 2) $y=x^2-x+\frac{1}{4}$;

3) $y=-x^2+6x-9$; 4) $y=-x^2-8x-16$.

572. 1) При каком условии квадратный трёхчлен $y=x^2+px+q$ представляет полный квадрат двучлена?

2) Как расположена в этом случае парабола относительно осей координат?

3) При каком условии квадратный трёхчлен имеет наибольшее или наименьшее значение?

4) Как вычислить координаты вершины параболы по коэффициентам трёхчлена?

573. Дан квадратный трёхчлен:

$$y=2x^2-4x+2.$$

Разложить правую часть уравнения на множители и выяснить:

1) При каких значениях x функция y имеет наименьшее значение; убывает; возрастает?

2) На одном и том же чертеже построить графики функций:

$$y=2x^2 \quad \text{и} \quad y=2x^2-4x+2.$$

3) Выяснить по графикам сходство и различие полученных кривых.

4) Найти координаты вершин парабол и сравнить расположение кривых относительно осей координат.

574. Пользуясь указаниями предыдущей задачи, исследовать квадратные трёхчлены:

$$1)\ y=-3x^2-6x-3; \qquad 2)\ y=-\frac{1}{2}x^2-2x-2.$$

575. 1) При каком условии квадратный трёхчлен $y=ax^2+bx+c$ представляет полный квадрат двучлена?

2) Как вычисляются при этом условии координаты вершины параболы по коэффициентам трёхчлена?

576. Дана парабола: $y=x^2$.

Написать уравнение каждой из парабол, полученных путём следующих перемещений данной параболы:

1) парабола перенесена на 5 единиц вверх;

2) парабола перенесена на 4 единицы вниз;

3) парабола перенесена вправо на 3 единицы;

4) парабола перенесена на 6 единиц влево;

5) направление ветвей параболы изменено на противоположное, и парабола перенесена на 7 единиц влево;

6) дать для каждого случая график, начерченный от руки (без точного построения).

577. Зависимость между x и y выражается уравнением

$$y=x^2+px+q.$$

Найти значение коэффициентов p и q, если известно, что:

1) функция y обращается в нуль лишь при $x=-2$;

2) функция y имеет наименьшее значение, равное 3, при $x=0$;

3) график функции касается оси x в точке $(-6;\ 0)$;

4) по составленным уравнениям начертить график каждой из функций на одном и том же чертеже.

578. 1) На одном чертеже построить графики функций:

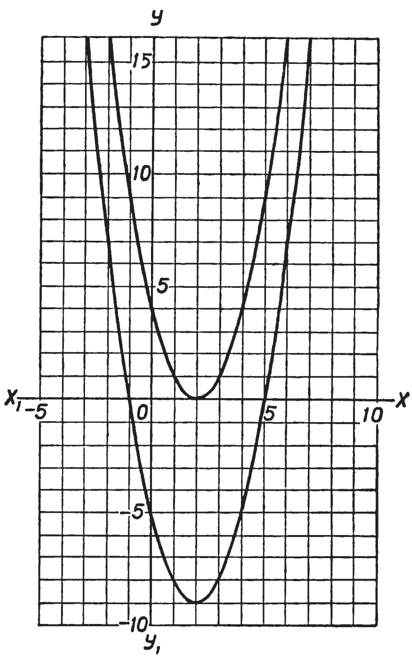
$$y=(x-2)^2 \text{ и } y=(x-2)^2-9,$$

заполнив предварительно следующую таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y=(x-2)^2$										
$y=(x-2)^2-9$										

2) Сравнить графики функций $y=(x-2)^2$ и $y=(x-2)^2-9$ и положение парабол относительно осей координат (черт. 20).

3) Найти по графику значения x, при которых функция $y=(x-2)^2-9$ обращается в нуль, и проверить результат путём решения соответствующего уравнения.



Черт. 20.

4) Выяснить, при каких значениях x функция $y=(x-2)^2-9$ убывает; имеет наименьшее значение; возрастает.

5) Проверить по графику и вычислением, что функция $y=(x-2)^2-9$ имеет:

а) положительные значения при $x<-1$ и при $x>5$;

б) $y<0$ при $-1<x<5$.

6) Найти координаты вершины параболы $y=(x-2)^2-9$.

579. 1) Квадратный трёхчлен $y=x^2-6x+4$ привести к виду $y=(x-3)^2-5$.

2) Вычислить значения x, при которых функция y обращается в нуль.

3) По уравнению

$$y=(x-3)^2-5$$

найти координаты вершины параболы.

4) Определить значения x, при которых функция: а) $y>0$; б) $y<0$; в) убывает; г) возрастает; д) имеет наименьшее значение.

5) На основании полученных результатов начертить схематический (от руки) график функции $y=(x-3)^2-5$.

580. 1) В квадратном трёхчлене $y=x^2+4x+5$ выделить полный квадрат.

2) Найти наименьшее значение функции и координаты вершины параболы.

3) Доказать, что функция $y=(x+2)^2+1$ не имеет корней (действительных).

4) Выяснить путём исследования выражения $(x+2)^2+1$, что при любых значениях x функция $y>0$.

5) Построить график функции, вычислив координаты следующих точек:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y											

581. Исследовать квадратный трёхчлен $y=-x^2+6x-12$, используя указания предыдущей задачи.

582. 1) Написать уравнение каждой из парабол, полученных путём следующих перемещений данной параболы: а) парабола $y=x^2$ перенесена на 4 единицы вправо и на 3 единицы вниз; б) парабола $y=-x^2$ перенесена на 5 единиц влево и на 2 единицы вверх; в) парабола $y=x^2$ перенесена на 6 единиц влево и на 5 единиц вниз.

2) В каждом случае: а) построить график функции; б) найти те значения x, при которых функция y обращается в нуль; в) найти те значения x, при которых функция имеет наибольшее значение (maximum) или наименьшее (minimum) значение.

583. Квадратный трёхчлен имеет вид:

$$y=x^2+px+q.$$

1) При каком условии трёхчлен имеет: а) два различных корня? б) два одинаковых корня? в) не имеет корней (действительных)?

2) При каком значении x трёхчлен имеет наименьшее значение?

3) Как находятся координаты вершины параболы по коэффициентам p и q?

584. Квадратный трёхчлен имеет вид:

$$y=\pm x^2+px+q.$$

1) Найти значения p и q:

а) если функция y обращается в нуль при $x_1=2$ и при $x_2=-3$;

б) если наименьшее значение функции равно (-2) и функция имеет это значение при $x=5$;

в) если график функции пересекает ось x в точках $(-4; 0)$ и $(-1; 0)$;

г) если функция y имеет наибольшее значение $(+6)$ при $x=-4$.

2) В каждом случае начертить (на одном чертеже) график функции и определить, при каких значениях x функция:

а) $y>0$; б) $y=0$; в) $y<0$.

585. 1) Квадратный трёхчлен $y=2x^2+4x-6$ привести к виду:

$$y=2(x+1)^2-8.$$

2) Вычислить значения x, при которых функция y обращается в нуль.

3) Выяснить путём исследования выражения $y=2(x+1)^2-8$, что функция:

а) принимает при $x=-1$ наименьшее значение, равное (-8);

б) при $x<-3$ и при $x>1$ функция $y>0$;

в) при $-3<x<1$ функция $y<0$.

4) На основании полученных результатов построить график изменения функции y в зависимости от изменения x, найдя частные значения x и y по таблице:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x^2+4x-6$									
$y=2x^2$									

5) На том же чертеже и в том же масштабе построить график функции $y=2x^2$ (черт. 21).

6) Сопоставить полученные графики и их уравнения и выяснить положение парабол относительно осей координат.

7) Найти координаты вершины параболы $y=2x^2+4x-6$ и выразить их через коэффициенты трёхчлена.

586. 1) Используя указания предыдущей задачи, исследовать трёхчлен $y=-2x^2-4x+6$.

2) Выяснить, что данный трёхчлен:

а) обращается в нуль при $x_1=-3$ и $x_2=1$;

б) имеет наибольшее значение $y=8$ при $x=-1$;

в) $y<0$ при $x<-3$ и $x>1$;

г) $y>0$ при $-3<x<1$.

3) Построить график трёхчлена.

587. 1) Доказать, что квадратный трёхчлен $y=2x^2-4x+6$ не имеет корней (действительных).

2) Привести данный трёхчлен к виду $y=2(x-1)^2+4$ и доказать, что при любых (действительных) значениях x функция $y>0$.

3) Доказать, что при $x=1$ трёхчлен имеет наименьшее значение, и вычислить это значение.

4) Выяснить, что при увеличении x от $-\infty$ до 1 функция убывает от $+\infty$ до 4, а при увеличении x от 1 до $+\infty$ функция y возрастает от 4 до $+\infty$. Начертить схематически график данной функции.

588. Дан квадратный трёхчлен $y=-2x^2+4x-6$.

1) Доказать, что этот трёхчлен не имеет корней (действительных).

2) Доказать, что при любых значениях x функция $y<0$.

3) Найти, при каком значении x трёхчлен имеет наибольшее значение и какое именно.

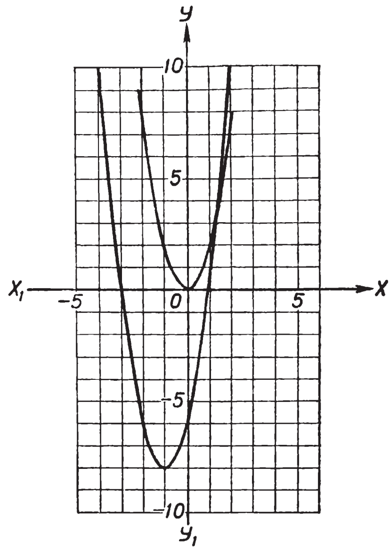
4) Определить, как изменяется функция y при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$.

5) Построить график изменения функции.

6) Проверить, что координаты вершины параболы $y=-2x^2+4x-6$ определяются по формулам:

$$x=-\frac{b}{2a},\quad y=-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

где a, b и c — коэффициенты трёхчлена ax^2+bx+c.



Черт. 21.

589. 1) Периметр прямоугольника равен 16 *см*. Таких прямоугольников может быть бесконечное множество; найти тот из них, площадь которого наибóльшая.

2) Из всех прямоугольных треугольников, сумма катетов которых равна 12 *см*, найти треугольник, имеющий наибóльшую площадь.

590. Для каждого из следующих квадратных трёхчленов определить:

а) при каких значениях аргумента трёхчлен обращается в нуль, принимает положительные или отрицательные значения;

б) при каком значении аргумента трёхчлен имеет наименьшее значение (минимум) или наибольшее значение (максимум) и какое именно;

в) построить график трёхчлена:

1) $f(x)=x^2-4x+3$; 2) $f(p)=-3p^2+4p-5$;

3) $f(t)=-t^2+7t-12$; 4) $f(n)=-4n^2+12n-9$;

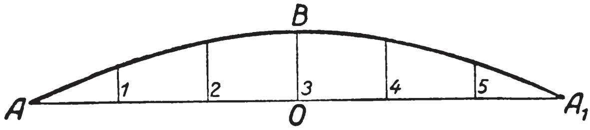
5) $f(r)=3r^2-5r+2$.

591. Решить графически следующие уравнения:

1) $x^2-7x+12=0$; 2) $x^2+x-6=0$;

3) $x^2+3x+2=0$; 4) $x^2-3x-4=0$.

592. Арка моста имеет форму дуги параболы, вершина которой находится в середине этой дуги (черт. 22). Арка имеет



Черт. 22.

5 вертикальных стоек, поставленных через равноотстоящие точки хорды, стягивающей арку. Найти длины этих стоек, если хорда равна $2d$, а высота арки равна h.

Решить задачу при $2d=108$ *м*; $h=13{,}5$ *м*.

593*. Решить неравенства:

1) $x^2-2x-15<0$; 2) $x^2-7x+12>0$;

3) $x^2+3x-40>0$; 4) $x^2-4x+3<0$.

5) Найти, при каких значениях x квадратный трёхчлен

$$x^2-5x+6:$$

а) положителен; б) отрицателен; в) равен нулю; г) имеет наименьшее значение и какое именно.

6) То же для трёхчлена:

$$3x^2-x+4.$$

ГЛАВА V.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ.

§ 28. Одно уравнение второй степени с двумя неизвестными.

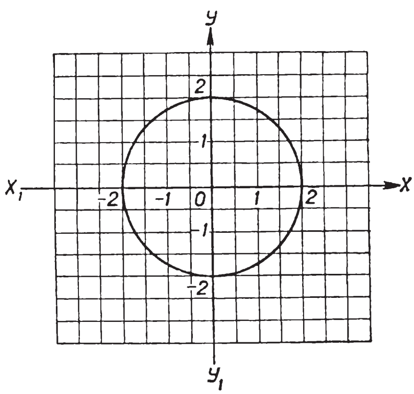
594. Дано уравнение: $x^2+y^2=4$.

1) Решить уравнение относительно y и, пользуясь таблицей частных значений x, найти несколько соответствующих значений y (с точностью до 0,1):

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
y									

2) Построить точки, координаты которых равны найденным (с точностью до 0,1) решениям уравнения $x^2+y^2=4$.

3) Соединить полученные точки плавной кривой и доказать, что геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=4$, есть окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2 (черт. 23).



Черт. 23.

4) Выяснить по графику и проверить вычислением, что значения x и y, являющиеся решениями уравнения $x^2+y^2=4$, не могут быть по абсолютной величине больше 2.

5) Доказать, что окружность радиуса r с центром в начале координат имеет уравнение вида: $x^2+y^2=r^2$.

595. Доказать, что каждое из следующих уравнений является уравнением окружности:

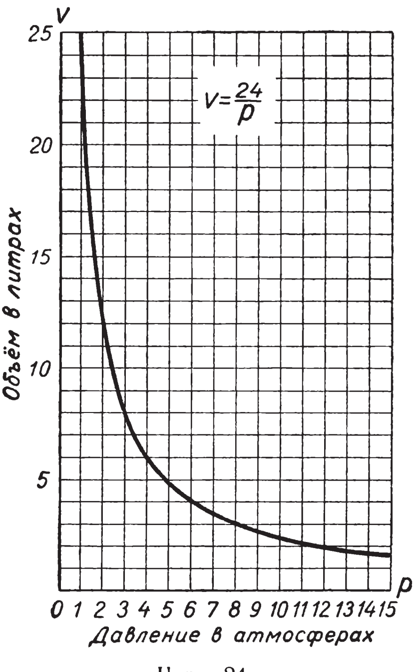
1) $3x^2 + 3y^2 = 27$; 2) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 8$;

3) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 9$; 4) $0,1x^2 = 10 - 0,1y^2$.

Найти радиус каждой окружности и построить её (на одном чертеже).

Указание. Привести каждое уравнение к виду: $x^2 + y^2 = r^2$.

596. 1) Зная, что при неизменной температуре произведение объёма газа на соответствующее давление есть величина постоянная, составить уравнение, выражающее зависимость между объёмом газа v и соответствующим давлением p, для газа, который, находясь под давлением 12 атмосфер, имеет объём 2 *л*.



Черт. 24.

2) Найти частные решения уравнения $pv = 24$, давая p следующие значения: 1,5; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15.

3) Построить график изменения объёма газа в зависимости от изменения соответствующего давления (черт. 24).

4) Найти по графику и проверить вычислением, чему равно v при p, равном 1,6; 2,4; 4,8.

5) Сколько решений имеет уравнение $pv = 24$?

6) Могут ли быть решениями уравнения $vp = 24$ значения v или p, равные нулю?

7) Как называется зависимость между v и p, выражаемая уравнением $vp = 24$?

8) Как называется кривая, изображающая графически эту зависимость?

597. Дано уравнение: $xy = 12$.

1) Решить уравнение относительно y и построить график функции $y = \frac{12}{x}$, вычислив частные значения y при следующих значениях x:

x	-12	-10	-8	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	8	10	12
y																

2) Выяснить по уравнению и проверить по графику (черт. 25) следующие свойства функции $y=\frac{12}{x}$:

а) аргумент x может принимать любые отрицательные и положительные значения, за исключением $x=0$;

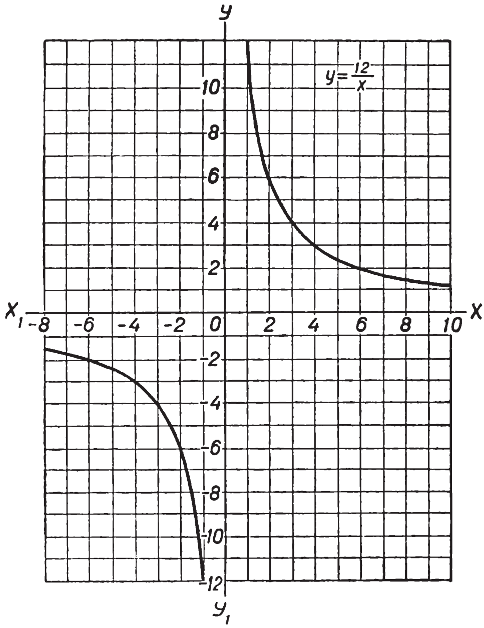
б) значения y изменяются обратно пропорционально значениям x;

в) при отрицательных значениях x функция y неограниченно убывает, оставаясь отрицательной;

г) при положительных значениях x функция y, оставаясь положительной, убывает, приближаясь к нулю при неограниченном увеличении аргумента.

3) Выяснить, что гипербола $y=\frac{12}{x}$ имеет две оси симметрии: $y=x$ и $y=-x$.

4) Построить оси симметрии гиперболы и показать, что одна из них пересекает гиперболу в двух точках (вершины гиперболы), а другая ось не пересекает её.



Черт. 25.

598. 1) Следуя указаниям, данным в задаче 597, построить геометрическое место точек, координаты которых являются решениями уравнения $xy=-12$.

2) Как изменяется положение гиперболы относительно осей координат в зависимости от знака члена уравнения $xy=a$, не содержащего неизвестного.

599. Точка, лежащая на гиперболе $y=\frac{m}{x}$, имеет координаты (2; 8). Написать уравнение гиперболы, найти координаты её вершин и начертить (схематически) график данной функции.

600*. Дано уравнение:

$$x^2-y^2=4.$$

1) Решить уравнение относительно y и доказать:

а) что x не может иметь значений меньше 2 по абсолютной величине;

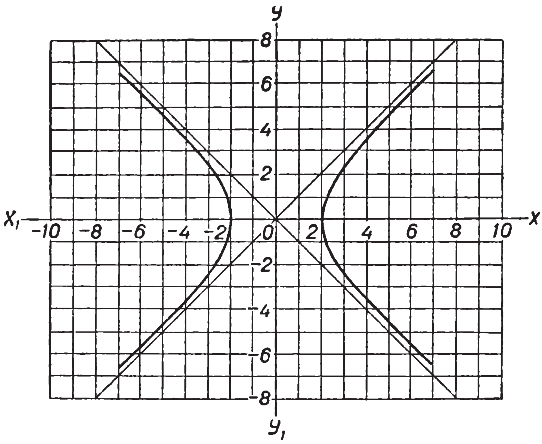
б) каждому значению x соответствует два значения y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку;

в) y обращается в нуль при $x = \pm 2$;

г) при неограниченном увеличении абсолютной величины $|x| > 2$ абсолютная величина y неограниченно возрастает.

2) Найти частные решения уравнения $x^2 - y^2 = 4$, давая x следующие значения и вычисляя y с точностью до 0,1:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	2	3	4	5	6	7
y												



Черт. 26.

3) Принимая каждое решение уравнения $x^2 - y^2 = 4$ за координаты точки, построить найденные точки и соединить их плавной кривой, учитывая результаты исследования уравнения (черт. 26).

4) Выяснить по графику и проверить по уравнению, что оси координат служат осями симметрии полученной кривой.

5) Построить прямые $y = x$ и $y = -x$ и выяснить по чертежу, что ветви кривой неограниченно приближаются к этим прямым (асимптоты кривой).

§ 29. Системы двух уравнений с двумя неизвестными, из которых одно второй степени, а другое — первой [1]).

601. 1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

[1]) Работу целесообразно начать с повторения решения систем уравнений первой степени, гл. I, № 39—43, 77.

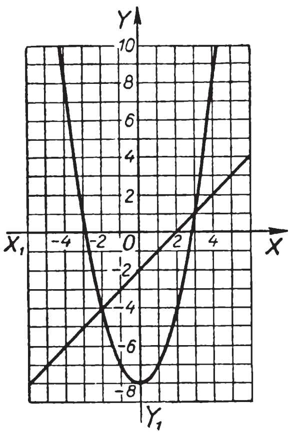
2) Построить график уравнений данной системы и найти координаты точек пересечения этих графиков. (Сравнить с черт. 27.)

3) Сколько решений имеет данная система уравнений?

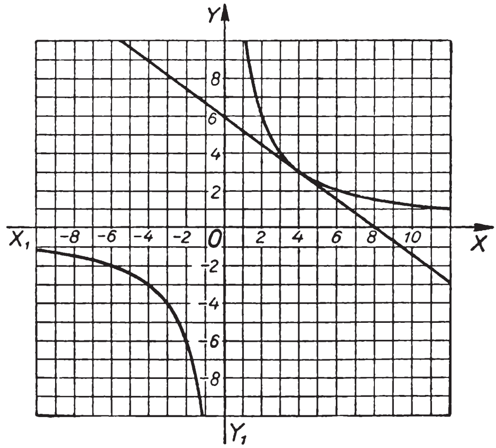
602. Решая алгебраически и графически систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 3x + 4y = 24, \end{cases}$$

показать, что она имеет одно решение. (Сравнить с черт. 28.)



Черт. 27.



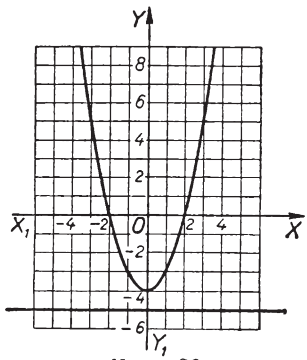
Черт. 28.

603. Решая алгебраически и графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ y + 6 = 1, \end{cases}$$

убедиться, что эта система не имеет решения. (Сравнить с черт. 29.)

Решить системы уравнений:



Черт. 29.

604. 1) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7. \end{cases}$

605. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 0, \\ y + 2x = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ x - y = -3. \end{cases}$

606. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5}, \\ x - y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=2, \\ x+y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-2)(y+1)=1, \\ x-y=3. \end{cases}$

607. 1) $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=-2a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=a+2b, \\ xy=ab+b^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=5a^2, \\ x+y=3a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{13a^2}{36}, \\ x-y=\frac{a}{6}. \end{cases}$

608. 1) $\begin{cases} \frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1, \\ \frac{3}{x+3}=\frac{2}{y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3}{x+5}+\frac{2}{y-3}=2, \\ \frac{4}{x-2}=\frac{1}{y-6}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3, \\ x+y=6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\frac{3}{2}, \\ x-y=1. \end{cases}$

609. 1) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1, \\ \frac{x-2}{y-3}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)}=\frac{1}{2}, \\ \frac{x-y}{x+y}=\frac{2}{5}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3x-2}{y+5}+\frac{y}{x}=2, \\ x-y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{2x-5}{x-2}+\frac{2y-3}{y-1}=2, \\ 3x-4y=1. \end{cases}$

610. 1) $\begin{cases} 7x^2-3y^2+5xy-2x-27=0, \\ x+y=5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2-5xy+y^2+10x+12y=100, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2+2x-2y+6=0, \\ y-x=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2-48x+4y-4=0, \\ 3x+y=2. \end{cases}$

611. 1) $\begin{cases} \frac{x+y}{y}=a, \\ 1+\frac{xy}{a+1}=a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{a-b}-\frac{a+b}{y}=0, \\ x-y=0; \end{cases}$

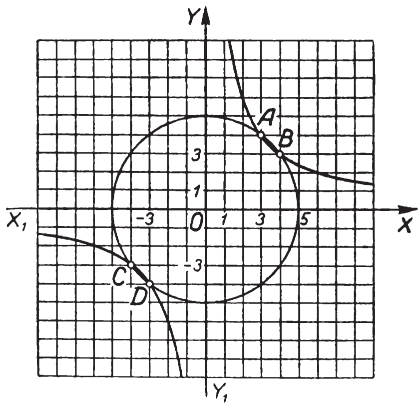
3) $\begin{cases} \frac{x-y}{a+1}=a, \\ x-y^2=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=2a, \\ \frac{x^2-2a^2+y^2}{2}=1. \end{cases}$

§ 30. Системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными.

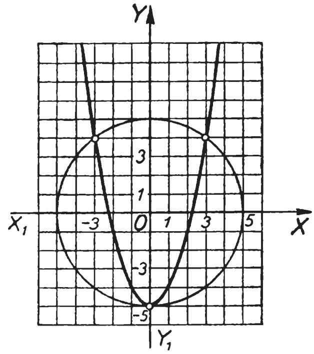
612. 1) Решить алгебраически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$$

2) Построить графики уравнений данной системы и найти координаты точек пересечения этих графиков. (Сравнить с черт. 30.)



Черт. 30.



Черт. 31.

3) Сколько решений имеет данная система уравнений?

613. Решая алгебраически и графически систему уравнений

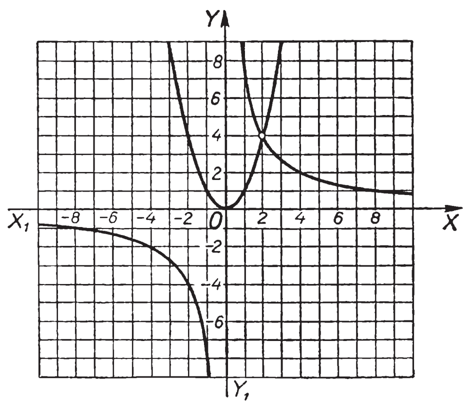
$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y=5, \end{cases}$$

показать, что она имеет три различных решения. (Сравнить с черт. 31.)

614. Решая алгебраически и графически систему уравнений

$$\begin{cases} xy=8, \\ y=x^2, \end{cases}$$

показать, что она имеет одно решение. (Сравнить с черт. 32.)



Черт. 32.

Решить системы уравнений:

615. 1) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x+y-xy=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2xy+y=10, \\ x-2xy+y=-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy+x+y=29, \\ xy-2(x+y)=2. \end{cases}$

616. 1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ 4x-4y=xy; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=14, \\ x^2+xy-y^2=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=10, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=10. \end{cases}$

617. 1) $\begin{cases} (x+y)(8-x)=10, \\ (x+y)(5-y)=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3xy+5y-5=0, \\ (x-2)(y-1)=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-5y^2-3x-y+22=0, \\ (x-3)(y-2)=y^2-3y+2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3. \end{cases}$

618. 1) $\begin{cases} x^2+xy=a, \\ y^2+xy=b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3a}{x-y}=\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{10a}{x+y}=\dfrac{y}{a}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-a}{x}+\dfrac{y-b}{b}=1, \\ \dfrac{x-a}{a}+\dfrac{y-b}{y}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x+m}{m}-\dfrac{y+m}{y}=3, \\ \dfrac{y+m}{m}-\dfrac{x+m}{x}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Решить следующие системы, используя теорему о сумме и произведении корней квадратного уравнения:

619. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=-36. \end{cases}$

620. 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=16, \\ xy=-48; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=-2. \end{cases}$

621. 1) $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=-2a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=2a, \\ xy=-3a^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=b, \\ xy=2b^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=a+2b, \\ xy=ab+b^2. \end{cases}$

622. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15. \end{cases}$

623. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5m^2}{4}, \\ xy=\frac{m^2}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{13a^2}{36}, \\ xy=\frac{a^2}{6}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{10a^2}{9}, \\ xy=\frac{a^2}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2+4b^2, \\ xy=2ab. \end{cases}$

При решении следующих систем уравнений использовать приём введения вспомогательного неизвестного:

624. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{26}{5}, \\ x^2-y^2=24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{9}{20}, \\ x^2-y^2=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

625. 1) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ x+y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{41}{20}, \\ x+y=41; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6}, \\ x-y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4. \end{cases}$

Решить следующие системы уравнений, левые части которых однородны относительно x и y:

626. 1) $\begin{cases} x^2-5y^2=-1, \\ 3xy+7y^2=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y^2-2xy=160, \\ y^2-3xy-2x^2=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=17, \\ x^2-y^2=-16. \end{cases}$

627. 1) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2, \\ xy+y^2=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+xy+4y^2=6, \\ 3x^2+8y^2=14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29, \\ 7x^2-8xy+7y^2=43; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38, \\ 5x^2-9xy-3y^2=15. \end{cases}$

Решить следующие системы уравнений:

628. 1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y=25. \end{cases}$

629. 1) $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=18, \\ xy+x^2+y^2=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=18, \\ xy+x^2+y^2=12. \end{cases}$

630. 1) $\begin{cases} x^3+y^3=72, \\ x^2-xy+y^2=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-y^3=218, \\ x^2+xy+y^2=109. \end{cases}$

631. 1) $\begin{cases} x^3-y^3=133, \\ x-y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+y^3=-217, \\ x+y=-7. \end{cases}$

632. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ x^2+y^2=160. \end{cases}$

633*. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{m}{n}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{a^2}{b^2}, \\ a-x=b-y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{y^2}=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2, \\ \dfrac{bx+ay}{bx-ay}=\dfrac{m}{n}. \end{cases}$

634*. 1) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}, \\ xy=(a^2-b^2)^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=a, \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=b; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=a^2, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=b^2. \end{cases}$

Решить системы уравнений с тремя неизвестными:

635. 1) $\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=2, \\ xz=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ y+z=7, \\ x^2+z^2=41. \end{cases}$

636*. 1) $\begin{cases} xy=2, \\ yz=6, \\ xz=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=6, \\ yz=12, \\ xz=8. \end{cases}$

637*. 1) $\begin{cases} xy=2, \\ xz=3, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=4, \\ yz=6, \\ x^2+z^2=13. \end{cases}$

638*. 1) $\begin{cases} y-x=3, \\ y-z=4, \\ x^2+y^2+z^2=30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=5, \\ x+z=6, \\ xy+xz+yz=29. \end{cases}$

§ 31. Задачи на составление систем уравнений.

639. Периметр прямоугольника равен 28 *см*, а сумма площадей квадратов, построенных на смежных сторонах прямоугольника, равна 116 *см*^{2}. Найти стороны прямоугольника.

640. Площадь прямоугольника равна 120 *см*^{2}, а диагональ его равна 17 *см*. Найти стороны прямоугольника.

641. Прямоугольный участок земли площадью в 2400 *м*^{2} обнесён кругом изгородью, длина которой равна 200 *м*. Найти длину и ширину этого участка.

642. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 *см*, а его площадь 180 *см*^{2}. Найти катеты.

643. 1) Периметр прямоугольного треугольника равен 48 *см*, а его площадь 96 *см*^{2}. Найти стороны треугольника.

2) Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, а его площадь равна q. Найти стороны треугольника.

644. Периметр треугольника равен $2p$, площадь его равна S, одна сторона равна a. Найти другие стороны треугольника.

645. 1) Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а среднее геометрическое 12. Найти эти числа.

2) Среднее арифметическое двух чисел 17, а среднее геометрическое 15. Найти эти числа.

646. Найти стороны равнобедренного треугольника, если известно, что две неравные высоты его равны a и b.

647. Сумма гипотенузы прямоугольного треугольника и высоты, опущенной на неё, равна m, а сумма катетов равна n. Найти гипотенузу.

648. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен h, а сумма катетов равна m. Найти гипотенузу.

649. Разность катетов прямоугольного треугольника равна n, а высота его, опущенная на гипотенузу, равна h. Найти гипотенузу.

650. Расстояние между двумя городами, равное 480 *км*, пассажирский поезд проходит на 4 часа скорее, чем товарный. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 *км* в час, а скорость товарного увеличить на 2 *км* в час, то пассажирский поезд пройдёт всё расстояние на 5 час. скорее товарного. Найти скорость каждого поезда.

651. Из городов A и B, расстояние между которыми равно 180 *км*, отправлены в одно и то же время два поезда навстречу друг другу. После их встречи поезд, вышедший из A, прибывает в B через 2 часа, а другой поезд приходит в A через 4 часа 30 мин. Найти скорость каждого поезда.

652. На двух прямоугольных участках земли посажено рядами 350 плодовых деревьев, причём оказалось, что на каждом участке число рядов на 1 больше числа деревьев в ряду. По скольку деревьев было посажено в каждом ряду на том и другом участке, если на первом из них было на 130 деревьев больше, чем на втором?

653. Учёт урожая на участках двух соревнующихся колхозных бригад показал, что на участке первой бригады было собрано 200 *ц* пшеницы, а на участке второй бригады, имеющем площадь на 2 *га* больше, собрано 300 *ц* пшеницы при урожае, на 5 *ц* с гектара большем, чем на первом участке. Найти площадь каждого участка земли и количество собранной пшеницы с 1 *га* того и другого участка.

654. Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на 6 *км* в час большей, чем на подъёме, затрачивает на путь от A до B 2 часа 40 мин., а на обратный путь от B до A на 20 мин. меньше. Найти скорость велосипедиста на подъёме и на спуске и длину подъёма в направлении от A к B, если длина всей дороги равна 36 *км*.

655. Для состязания велосипедистов установлена дистанция 6 *км*. Велосипедист A обогнал велосипедиста B, придя к финишу на 2 мин. раньше B. Если бы A уменьшил скорость на 0,1 *км* в мин., а B на столько же увеличил свою скорость, то B пришёл бы к финишу на 2 мин. раньше A. Найти скорость в час каждого велосипедиста.

656. С первого участка земли собрали 4,8 *т* картофеля; со второго участка, площадь которого на 0,03 *га* меньше первого, собрали 2 *т* картофеля, причём с 1 $м^2$ этого участка собрали на 2 *кг* меньше, чем с 1 $м^2$ первого участка. Найти площадь каждого участка и сколько картофеля собрали с 1 $м^2$ того и другого участка.

657. Деревянная балка весит 90 *кг*, а железная балка, длина которой на 2 *м* больше деревянной, весит 160 *кг*, причём вес одного погонного метра железной балки на 5 *кг* больше веса погонного метра деревянной балки. Найти вес одного погонного метра и длину каждой балки.

658. Равнодействующая двух сил, направленных под прямым углом, равна 89 *кГ*. Если каждую из этих сил уменьшить на 3 *кГ*, то равнодействующая уменьшится на 4 *кГ*. Найти величину составляющих сил.

659. Равнодействующая двух сил, направленных под прямым углом, равна 25 *кГ*. Если меньшую силу увеличить на 8 *кГ*, а бо́льшую уменьшить на 4 *кГ*, то равнодействующая останется без изменения. Найти величину составляющих сил.

660. Из двух жидкостей, удельные веса которых соответственно равны $1{,}2\frac{Г}{см^3}$ и $1{,}6\frac{Г}{см^3}$, составлена смесь весом 60 *Г*. Сколько граммов взято каждой жидкости и каков удельный вес смеси, если 8 $см^3$ её весят столько же, сколько весит всё количество менее тяжёлой из смешанных жидкостей?

661. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найти это число.

662. Тело движется равномерно ускоренно (без начальной скорости) и, пройдя путь 360 *м*, приобретает скорость, равную 12 *м* в сек. Сколько времени и с каким ускорением двигалось тело?

663. Поезд вышел со станции и, двигаясь равноускоренно, на расстоянии в 2,1 *км* развил скорость в 54 *км* в час. Найти ускорение поезда и время разгона.

664. Тело, имеющее начальную скорость, получает ускорение в $25\frac{см}{сек^2}$. В конце своего пути, длиной в 570 *м*, тело имело скорость 17 *м* в сек. Найти начальную скорость тела и узнать, сколько времени оно двигалось ускоренно.

665. По двум сторонам прямого угла по направлению к его вершине движутся равномерно два тела. В известный момент тело A отстояло на 60 *м* от вершины угла, а тело B — на 80 *м* от неё. Через 3 сек. расстояние между A и B стало равно 70 *м*, а через 2 следующие секунды расстояние между телами уменьшилось ещё на 20 *м*. Найти скорость каждого тела.

666. По круговой дорожке длиной 2 *км* движутся по одному направлению два конькобежца, которые сходятся через каждые 20 мин. Найти часовую скорость каждого конькобежца, если первый из них пробегает окружность на 1 мин. скорее второго.

667. По окружности круга, длина которой c метров, движутся два тела; первое пробегает окружность на t секунд скорее, чем второе, и если они движутся по одному направлению, то сходятся через каждые n секунд. Найти линейную скорость каждого тела.

ГЛАВА VI.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА VIII КЛАССА.

668. Диаметр d болта, выдерживающего предельную нагрузку Q *кг*, выражается в сантиметрах следующей формулой:

$$d = 0{,}45\sqrt{Q} + 0{,}5.$$

Вычислить, пользуясь таблицами квадратных корней, как велик должен быть диаметр болта, чтобы он выдержал нагрузку:
1) 150 *кг*; 2) 200 *кг*; 3) 250 *кг*.

Результат вычислений округлить с точностью до 1 *см*.

669. При каком условии:

1) $\sqrt{x^2y} = x\sqrt{y}$;

2) $\sqrt{(a-2)^3} = (a-2)\sqrt{a-2}$;

3) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$;

4) $\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{(x-1)} \cdot \sqrt{x-2}$.

670. Доказать тождества:

1) $\dfrac{x + 2\sqrt{xy^2} + y^2}{\sqrt{x+y}} = \sqrt{x+y}$;

2) $\dfrac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{xy}$.

671. Вычислить: 1) $\left[a^{-\frac{2}{3}}b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$

при $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

2) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}$

при $a = 1{,}2$, $b = \dfrac{3}{5}$.

672. Доказать, что при

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

где $a>0$, $b>0$, $a>b$, выражение:

$$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=a-b.$$

673. 1) На одном и том же чертеже и в одинаковом масштабе построить графики следующих функций:

$$y=x^2;\quad y=-x^2;\quad y=(x-1)^2;\quad y=x^2+2x;\quad y=x^2+4x+3.$$

2) Пояснить, в чём состоит сходство и в чём различие построенных графиков.

3) При каких значениях x каждая из этих функций убывает, возрастает, обращается в нуль, принимает наименьшее или наибольшее значение и какое именно?

674. Решить графически следующие системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x^2+y=2x-1, \\ x+y=-1; \end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12. \end{cases}$$

675. Решить уравнения:

1) $\frac{2}{a+2x}-\frac{2}{a-2x}-\frac{4x^2-4a-a^2}{4x^2-a^2}=0;$

2) $\sqrt{2(2x+5)}+\sqrt{27+8x}=4;$

3) $(x-7)(x-4)(x+3)(x+1)=$
$=96-(x-1)(x-3)(x+4)(x+7);$

4) $\frac{x^3}{a-b}-\frac{4a^2b^2}{ax-bx}=2(a+b)x,\ a\neq b.$

676. 1) При каких значениях k уравнение

$$2x^2+(k-9)x+k^2+3k+4=0$$

имеет равные корни?

2) Найти c в уравнении $x^2-12x+c=0$,
если один из его корней больше другого на $2\sqrt{5}$.

3) Доказать, что при любых действительных значениях a, b и c уравнение

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2}$$

имеет действительные корни.

677. Решить следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=106, \\ xy=45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+xy^2=104, \\ x+xy=24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-5xy+y^2=-47, \\ xy=21; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+xy=6, \\ \frac{xy}{4}+y^2=1\frac{3}{4}. \end{cases}$

Задачи для проверочных и самостоятельных работ.

678. 1) Пароход прошёл 90 *км* по течению реки и 36 *км* против течения, причём на путь по течению реки он затратил на 2 часа больше, чем на путь против течения. В 1 час по течению реки пароход проходит на 6 *км* больше, чем против течения реки. Сколько километров в час проходит пароход против течения реки?

2) Выполнить действия:

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$$

при условии, что $x>y>0$.

3) Не решая уравнения

$$x^2-4x+3=0,$$

составить новое уравнение, корни которого были бы обратны корням данного уравнения.

679. 1) Скорый поезд проходит в 1 час на 10 *км* больше почтового. Если скорый поезд пройдёт 160 *км*, а почтовый 180 *км*, то время, затраченное скорым поездом, будет на 2 часа меньше времени, затраченного почтовым поездом. Сколько километров в час проходит скорый поезд?

2) Выполнить действия:

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{\frac{a^4}{x^4}-1}$$

при условии, что $|a|>|x|>0$.

3) Решить графически уравнение:

$$x^2-2x-3=0.$$

680. 1) В зрительном зале кинотеатра 300 мест. Если число мест в каждом ряду увеличить на 2, а число рядов уменьшить на 3, то число всех мест в зале уменьшится на 11. Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра?

2) Решить уравнение:

$$\frac{ab}{x-a}+\frac{ax}{x+b}=-b.$$

3) Что больше:

$$\frac{1}{4}\sqrt{48} \text{ или } \sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}?$$

681. 1) Две бригады, работая совместно, закончили устройство водоёма за 12 дней. Сколько дней потребовалось бы на устройство водоёма каждой бригаде отдельно, если одна из них могла бы выполнить эту работу на 10 дней скорее другой?

2) Выполнить действия:

$$\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2.$$

3) В уравнении $x^2-3x+q=0$ найти значение q, при котором корни уравнения x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению

$$2x_1+3x_2=7.$$

682. 1) Автобус вышел из города A в город B, отстоящий от A на 150 *км*. Через три часа после отправления автобус вынужден был остановиться в пути на 20 мин., а остальной путь шёл со скоростью, на 6 *км* в час большей первоначальной скорости, и потому прибыл в город B без опоздания. Найти первоначальную скорость автобуса.

2) Решить уравнение:

$$\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{2x-1}.$$

3) Не решая уравнения $x^2-5x+3=0$, найти сумму квадратов корней этого уравнения.

683. 1) Расстояние от города A до города B, равное 280 *км*, автомобиль прошёл с некоторой средней скоростью. Шофёр автомобиля подсчитал, что это расстояние он мог бы проехать на 1 час скорее, если бы за каждый час он проезжал на 5 *км* больше. Сколько часов шла машина от города A до города B?

2) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6},\\ x+y=5.\end{cases}$$

3) Сократить дробь:

$$\frac{x-y}{x+y-2\sqrt{xy}}.$$

684. 1) Мотоциклист отправился из города A в город B, отстоящий от A на 60 *км*. Обратно он выехал с той же скоростью, но через 1 час после выезда был вынужден на 20 мин.

остановиться. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 4 *км* в час. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он употребил столько же времени, сколько на путь из A в B?

2) Найти значение функции:

$$6x^3 - 12x^2 + 3x + 4$$

$$\text{при} \quad x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}).$$

3) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{xy} = 15. \end{cases}$$

4) В уравнении $(k-2)x^2 + (k-5)x - 5 = 0$ найти то значение k, при котором один из корней уравнения равен (-2).

685. 1) Колонна войск протяжением d километров движется по шоссе походным маршем со скоростью v *км* в час. Конный вестовой выезжает из конца колонны в её начало, передаёт приказание и тотчас же отправляется обратно в конец колонны. На проезд туда и обратно вестовой затратил t минут. Определить скорость вестового, если она на всём пути его была одинакова.

2) Решить уравнение:

$$\sqrt{4a + b - 5x} + \sqrt{4b + a - 5x} - 3\sqrt{a + b - 2x} = 0.$$

3) Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 12, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

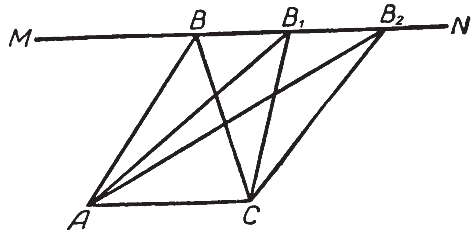
4) При каком значении k уравнение $9x^2 + kx + 4 = 0$ имеет равные корни?

ГЛАВА VII.

ПРЕДЕЛЫ.

§ 32. Предел переменной величины.

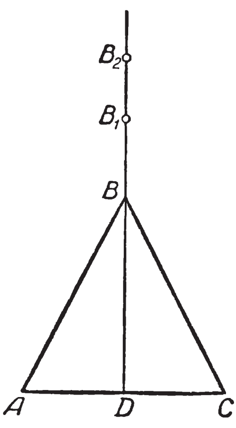
686. Вершина B треугольника ABC, основание AC которого остаётся неизменным, перемещается по прямой MN, параллельной AC (черт. 33).



Черт. 33.

1) Какие из следующих величин будут при этом перемещении вершины B постоянными и какие переменными: а) высота треугольника, опущенная из вершины B; б) периметр треугольника ABC; в) площадь треугольника ABC; г) величина угла BAC; д) величина угла BCA; е) величина угла ABC; ж) сумма внутренних углов треугольника ABC.

2) Если вершина B треугольника ABC будет перемещаться по прямой MN вправо от начального положения, то какие из указанных переменных величин будут возрастающими неограниченно; возрастающими, но ограниченными сверху; убывающими, но ограниченными снизу?



Черт. 34.

687. Вершина B равнобедренного треугольника ABC (черт. 34) перемещается вверх по высоте BD треугольника, неограниченно удаляясь от основания AC, которое остаётся неизменным.

Рассмотреть величину угла A; величину угла B; высоту BD треугольника ABC; периметр треугольника; сумму внутренних углов треугольника; площадь треугольника; величину угла BDC и указать, какие из этих величин при таком перемещении вершины B будут возрастающими неограниченно; возрастающими, но ограниченными сверху; убывающими, но ограниченными снизу; постоянными.

688. Величина центрального угла α правильного многоугольника вычисляется по формуле: $\alpha_n = \frac{360°}{n}$, где n — число сторон правильного многоугольника.

1) Какие значения может принимать в этой формуле буква n?

2) Найти с точностью до десятых долей градуса числовые значения α_n, заполняя следующую таблицу:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	...	100	360	3600
α_n	120°											

3) При каких значениях n величина центрального угла правильного n-угольника будет меньше 1°; 1′; 1″?

4) Показать, что величина центрального угла правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон есть переменная величина, значения которой образуют убывающую числовую последовательность, ограниченную снизу.

689. Величина внутреннего угла β правильного многоугольника вычисляется по формуле: $\beta_n = \frac{180°(n-2)}{n}$, где n — число сторон правильного многоугольника.

1) Найти с точностью до 0,1 градуса числовые значения переменной β_n, заполнив следующую таблицу:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	100	1000	...
β_n	60°												

2) При каких значениях n абсолютная величина разности $180° - \beta_n$ будет меньше 1°?

3) Показать, что величина внутреннего угла правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон есть величина переменная, значения которой образуют возрастающую числовую последовательность, ограниченную сверху.

690. Сумма внутренних углов s_n правильного многоугольника, имеющего n сторон, вычисляется по следующей формуле: $s_n = 180°(n-2)$, где n — натуральное число, большее 2.

1) Найти последовательность числовых значений переменной s_n, заполнив следующую таблицу:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	...	100	1000	...
s_n	180°											

2) При каких значениях n величина s_n будет больше 1 000 000°?

3) Показать, что сумма углов правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон есть величина неограниченно возрастающая.

4) Привести примеры неограниченно возрастающих величин.

691. Дана переменная величина $x_n = -n + 1$, где n — любое натуральное число.

1) Найти последовательность числовых значений переменной x_n, заполнив следующую таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
x_n													

2) Построить на числовой прямой точки, абсциссы которых равны найденным значениям переменной величины x_n.

3) При каких значениях n переменная величина x_n будет меньше (— 10 000)?

4) Показать, что при неограниченном возрастании числа n переменная величина x_n неограниченно убывает.

5) Записать при помощи математических знаков, что переменная величина x неограниченно убывает.

692. Дана переменная величина $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$, где n — любое натуральное число.

1) Найти с точностью до 0,1 последовательность числовых значений переменной x_n, заполнив следующую таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	19	20	...
x_n	1	$2\frac{1}{2}$												

2) Построить на числовой оси точки, абсциссы которых равны найденным значениям переменной x_n.

3) При каких значениях n абсолютная величина разности $x_n - 2$ будет меньше $\frac{1}{100}$?

4) Показать, что переменная величина x_n при неограниченном увеличении числа n является величиной колеблющейся и ограниченной.

693. Дана переменная величина $x_n = (-1)^n$, где n — любое натуральное число.

1) Найти числовые значения x_n, давая n значения от 1 до 10.

2) Показать, что при любых значениях n переменная величина x_n не может принимать других значений, кроме 1 и -1.

694. Дана переменная величина $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, где n — любое натуральное число.

1) Найти с точностью до 0,1 числовые значения переменной x_n, давая n значения от 1 до 10.

2) Построить на числовой оси точки, абсциссы которых равны найденным значениям x_n.

3) При каких значениях n абсолютная величина разности $1 - x_n$ будет меньше 0,01?

4) Показать, что переменная величина x_n при неограниченном увеличении n есть величина возрастающая и ограниченная сверху.

695. Дана переменная величина $x_n = 3 + \frac{2}{n}$, где n — любое натуральное число.

1) Найти с точностью до 0,1 числовые значения переменной x_n, давая n значения от 1 до 10.

2) Построить на числовой оси точки, абсциссы которых равны найденным значениям переменной x_n.

3) При каких значениях n абсолютная величина разности $x_n - 3$ будет меньше 0,001?

4) Показать, что переменная величина x_n при неограниченном увеличении n есть величина убывающая и ограниченная снизу.

696. 1) Показать, что переменная величина $x_n = \frac{n+1}{2}$, где n — натуральное число, неограниченно возрастает.

2) Найти, при каких значениях n переменная x_n будет больше 100; больше 1000; больше 100 000.

697. 1) Показать, что переменная величина $x_n = -3n^2 + 4$, где n — любое натуральное число, неограниченно убывает.

2) Найти, при каких значениях n переменная x_n будет меньше (-8423); меньше (-58796).

698. В окружность радиуса R вписываются правильные многоугольники так, что число их сторон неограниченно удваивается. Установить, как в данном процессе будут изменяться периметры многоугольников, их апофемы и длины сторон.

699. Отрезок OM, равный 1, делится в точке A пополам, далее отрезок AM делится пополам в точке B, затем BM делится пополам в точке C и т. д. (черт. 35).

Черт. 35.

Найти длины отрезков OA, OB, OC и т. д. и установить, что длины этих отрезков при неограниченном продолжении описанного процесса будут возрастать, но ограниченно.

700. Дана переменная величина $x_n=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число.

Показать, что каким бы малым ни было взято число $\varepsilon>0$, всегда можно найти такое значение n, начиная с которого все значения x_n будут меньше ε.

701. Показать, что переменная величина $x_n=\frac{n}{n+1}$, где n — любое натуральное число, возрастает, но остаётся меньше 1.

1) Найти, при каких значениях n разность между 1 и x_n будет меньше 0,01; меньше 0,001; 0,0001.

2) Показать, что каким бы малым ни было взято число $\varepsilon>0$, всегда можно найти такое значение n, при котором $|1-x_n|<\varepsilon$.

702. Показать, что переменная величина $x_n=\frac{n+1}{n}$, где n — любое натуральное число, убывает, но остаётся больше 1.

1) При каких значениях n величина x_n будет отличаться от 1 меньше, чем на 0,001?

2) Показать, что каким бы малым ни было взято число $\varepsilon>0$, всегда можно найти такое значение n, при котором $|x_n-1|<\varepsilon$.

703. Доказать, что пределом величины внутреннего угла правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон является угол в 180°.

704. Доказать, что пределом величины центрального угла правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон является угол в нуль градусов.

705. В следующих примерах буква n обозначает натуральное число.

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$.

706. Найти пределы следующих переменных величин, где n — натуральное число:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n-1}{n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n-2}$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{2n-1}$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n+1}{n}$.

707. Известно, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{2}{3}, \quad \text{а} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \frac{1}{2}$$

(n — натуральное число).

Найти пределы следующих переменных величин:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n)$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n)$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n)$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}$;

5) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(3x_n + \frac{y_n}{2}\right)$; 6) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + x_n\right)$;

7) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n^2 - y_n + 2}{x_n}$; 8) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5 + x_n^2 + y_n^2}{x_n - y_n}$.

Найти пределы следующих переменных величин:

708. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x-1}{x}$; 4) $\lim\limits_{n \to 1} \frac{2n+1}{3n-1}$.

709. 1) $\lim\limits_{n \to 2} \frac{4n+1}{n}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+4}{x+4}$; 4) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-3x+4}{x-1}$.

710. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}$;

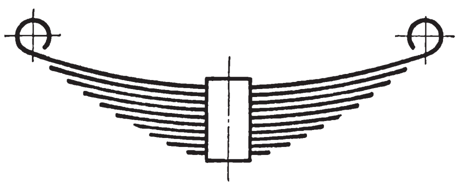
3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$.

ГЛАВА VIII.

ПРОГРЕССИИ.

§ 33. Арифметическая прогрессия.

711. Вагонная рессора состоит из 10 металлических листов, наложенных друг на друга и сшитых. Верхний лист рессоры имеет в длину 105 *см*, а каждый из остальных листов на 9 *см* короче предыдущего. Найти общую длину десяти металлических листов, необходимых для изготовления рессоры (черт. 36).



Черт. 36.

712. 1) (Устно.) Найти 10-й член прогрессии: 3, 7, 11, ...

2) (Устно.) Найти 40-й член прогрессии: 8, 6, 4, ...

3) (Устно.) Найти 20-й член прогрессии: $\div m$, $4m$, $7m$, ...

4) $a_3=12$; $a_6=27$. Найти d.

5) $a_4=3m$; $a_7=2m$. Найти d.

713. Определить последний член арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_1=8$; $d=5$; $n=15$;

2) $a_1=110$; $d=-10$; $n=11$;

3) $a_1=4$; $d=-\frac{1}{4}$; $n=13$;

4) $a_1=-1{,}6$; $d=-0{,}2$; $n=23$.

714. Найти сумму членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_1=1$;	$d=3$;	$n=12$;
2) $a_1=100$;	$d=-2$;	$n=50$;
3) $a_1=-10$;	$d=5$;	$n=25$;
4) $a_1=-10$;	$d=-2$;	$n=6$;
5) $a_1=2$;	$d=-\frac{4}{9}$;	$n=10$;
6) $a_1=5{,}2$;	$d=0{,}4$;	$n=43$.

715. 1) Определить сумму всех натуральных чисел: а) от 1 до 100; б) от 1 до n.

2) Доказать, что $1+2+3+4+\ldots+10+9+8+\ldots+2+1=10^2$.

716. Найти сумму всех чётных натуральных чисел до 100 включительно.

717. Определить сумму всех нечётных натуральных чисел от 13 до 81 включительно.

718. Вычислить сумму всех двузначных натуральных чисел.

719. 1) Найти n-е нечётное число и сумму n нечётных чисел натурального ряда.

2) Найти n-е чётное число и сумму n чётных чисел.

720. Между числами 7 и 35 поместить 6 чисел, которые вместе с данными числами составили бы арифметическую прогрессию.

721. Найти 5 чисел, которые следует поместить между числами 1 и 25 так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

722. Между каждыми двумя последовательными членами ряда 2, 14, 26 вставить по 5 средних арифметических. Составить искомый ряд.

723. Между числами a и b поместить m чисел, которые вместе с данными числами составили бы арифметическую прогрессию. Определить три первых члена этой прогрессии.

724. Определить сумму членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_1=5$;	$a_n=105$;	$n=26$;
2) $a_1=-10$;	$a_n=-20$;	$n=6$;
3) $a_1=\frac{3}{4}$;	$a_n=3\frac{7}{8}$;	$n=26$;
4) $a_1=a$;	$a_n=9a+8b$;	$n=9$.

725. Определить первый член и сумму членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $d=10$;	$n=45$;	$a_n=459$;
2) $d=2$;	$n=15$;	$a_n=-10$;
3) $d=-\frac{1}{4}$;	$n=13$;	$a_n=1$;
4) $d=1+q$;	$n=28$;	$a_n=28+27q$.

726. Определить число членов и сумму членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_1 = 0$; $d = \frac{1}{2}$; $a_n = 5$;

2) $a_1 = -4{,}5$; $d = 5{,}5$; $a_n = 100$;

3) $a_1 = -37\frac{1}{2}$; $d = 4$; $a_n = 46\frac{1}{2}$;

4) $a_1 = 14{,}5$; $d = 0{,}7$; $a_n = 32$.

727. Решить следующие задачи где по трём известным величинам требуется определить две неизвестные:

№	a_1	d	n	a_n	S_n	№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	1,5			54	999	7		3	31		0
2	0,2			5,2	137,7	8		$\frac{1}{3}$	37		$209\frac{2}{3}$
3	—28		9		0	9	—9	$\frac{1}{2}$			—75
4	0,7		30		108	10	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$			$-158\frac{2}{3}$
5			14	140	1050	11		2,5		27	157,5
6			10	—37	—55	12		0,3		50,3	2551,3

728. В каждом из номеров следующей таблицы две величины принять за неизвестные и определить их по трём остальным данным (проверить таблицу):

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	1	$\frac{2}{3}$	100	67	3400
2	0	0,5	11	5	27,5
3	-6	$\frac{3}{4}$	30	$15\frac{3}{4}$	$146\frac{1}{4}$
4	-38	2	15	-10	-360

729. Четвёртый член арифметической прогрессии равен 10, а седьмой член её равен 19. Найти первый член и разность этой прогрессии.

730. Сумма всех членов арифметической прогрессии равна 28, третий член её равен 8, четвёртый 5. Найти крайние члены и число членов этой прогрессии.

731. Сумма второго и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 16, а произведение первого и пятого членов её равно 28. Найти первый член и разность этой прогрессии.

732. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_2+a_5-a_3=10$, $a_1+a_6=17$; 2) $S_2-S_4+a_2=14$, $S_3+a_3=17$;

3) $5a_1+10a_5=0$, $S_4=14$.

733. Определить первый член, разность и число членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_n=55$, $a_2+a_5=32{,}5$, $S_{15}=412{,}5$; 2) $S_3=30$, $S_5=75$, $S_n=105$.

734. Определить первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_7-a_3=8$, $a_2\cdot a_7=75$; 2) $a_4:a_6=-1$, $a_2\cdot a_8=-1$; 3) $a_4^2+a_{12}^2=1170$, $a_7+a_{15}=60$.

735*. 1) Найти сумму $m+n$ членов арифметической прогрессии, в которой m-й член равен n, а n-й член равен m.

2) Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, в которой $(m+1)$-й член равен $2m+1$.

736*. Найти x из уравнения:

1) $1+4+7+\ldots+x=117$;

2) $1+7+13+\ldots+x=280$;

3) $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\ldots+(x+28)=155$.

737. Написать первые три члена арифметической прогрессии, для которой общий член выражается формулой:

1) $a_n=\frac{3n-1}{6}$; 2) $a_n=\frac{5n+7}{3}$; 3) $a_n=\frac{8n-3}{5}$.

738. Написать первые три члена арифметической прогрессии, у которой сумма n членов выражается формулой:

1) $S_n=5n^2+3n$; 2) $S_n=7n^2-5n$; 3) $S_n=3n^2$.

739*. 1) Доказать, что если числа $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$; $\frac{1}{b+a}$ составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 тоже составят арифметическую прогрессию.

2) Доказать, что если числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то

$$3(a^2+b^2+c^2)=6(a-b)^2+(a+b+c)^2.$$

740. Свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 *м*, а в каждую следующую секунду на 9,8 *м* более, чем в предыдущую [1]).

Определить:

1) какое расстояние пройдёт падающее тело за 12 сек.;

2) сколько секунд будет падать тело с высоты 1960 *м*.

741. Камень, падая с поверхности земли в шахту, достиг её дна через 5 сек. Найти глубину шахты.

742. Сколько секунд будет лететь вертикально вверх пуля, если в первую секунду она пролетела 300 *м*, а в каждую следующую секунду пролетала на 9,8 *м* меньше, чем в предыдущую?

743. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только число целых часов от 1 до 12?

744. С 1 по 12 июля включительно температура воздуха ежедневно поднималась в среднем на $\frac{1}{2}$ градуса. Зная, что средняя температура за это время оказалась равной $18\frac{3}{4}$ градуса, определить температуру воздуха 1 июля.

745. Предполагается, что при углублении на каждые 30,5 *м* внутренняя температура земли возрастает на 1° С. Если на поверхности земли температура равна 10° С, то:

1) какова температура будет на глубине 1000 *м*?

2) на какой глубине температура достигнет точки кипения воды?

746. Определить число сторон многоугольника, у которого число градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах его, составляет арифметическую прогрессию с первым членом 120° и разностью 5°.

747. Доказать, что если a, b и c суть три последовательных члена арифметической прогрессии, то между ними существует соотношение:

$$a^2+8bc=(2b+c)^2.$$

748. За сколько часов велосипедист проедет 54 *км*, если в первый час он проезжает 15 *км*, а в каждый следующий час на 1 *км* меньше, чем в предыдущий?

---

[1]) Сопротивление воздуха не учитывается.

749. Амфитеатр состоит из 10 рядов, причём в каждом следующем ряду на 20 мест больше, чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает амфитеатр?

750. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость и через 10 мин. достигает скорости 30 *км* в час. Найти ускорение поезда в минуту.

751. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором 2, дальше 3 шара и т. д. Во сколько рядов размещены шары, если число их равно 15?

752. Отец дарит каждому из своих сыновей в день его рождения, начиная с пяти лет, столько книг, сколько сыну лет. Лета пяти сыновей составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3. Сколько лет было каждому сыну, когда у них составилась библиотека в 325 книг?

753. Брёвна сложены в груду следующим образом: в нижнем слое уложено 15 брёвен, брёвна второго слоя уложены на промежутки нижнего слоя и т. д. Последний ряд составляет 1 бревно. Определить число брёвен в этой груде.

754. Шар, движущийся по наклонной плоскости, проходит в первую секунду 0,5 *м*, а в каждую следующую секунду — на 0,8 *м* больше, чем в предыдущую. Найти расстояние, пройденное шаром в течение 10 сек.

755. Из пункта A выехал велосипедист, который в первый час проехал 10 *км*, а в каждый следующий час проезжал на 1 *км* больше, чем в предыдущий. Одновременно вслед за ним из пункта B, находящегося от A на расстоянии 7,5 *км*, выехал второй велосипедист, который в первый час проехал 12 *км*, а в каждый следующий час проезжал на 1,5 *км* больше, чем в предыдущий. Определить, через сколько часов второй велосипедист догонит первого.

756. Два тела, находясь на расстоянии 153 *м* друг от друга, движутся навстречу одно другому. Первое тело проходит 10 *м* в сек., а второе в первую секунду прошло 3 *м* и в каждую следующую на 5 *м* больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд они встретятся?

757. Периметр некоторого многоугольника равен 158 *см*, причём длины сторон его составляют арифметическую прогрессию, разность которой 3 *см*. Наибольшая сторона многоугольника равна 44 *см*. Сколько сторон имеет многоугольник?

758. Могут ли стороны прямоугольного треугольника образовать арифметическую прогрессию?

759. Могут ли стороны и периметр треугольника образовать арифметическую прогрессию?

760. Из пункта A движется в одном и том же направлении тело, проходя в первую минуту 3 *м*, а в каждую из следующих минут на 6 *м* больше, чем в предыдущую. Через 5 мин. после выхода первого тела из того же пункта A выходит другое тело и движется в направлении, противоположном первому, проходя в первую минуту 54 *м*, а в каждую следующую минуту на 3 *м* больше, чем в предыдущую. Через сколько минут (после выхода второго тела) тела будут находиться на равном расстоянии от пункта A?

761. Два тела, выйдя одновременно, движутся навстречу друг другу из двух пунктов, находящихся на расстоянии 200 *м*. Первое тело проходит по 12 *м* в сек., а второе тело в первую секунду прошло 20 *м*, а в каждую следующую секунду проходит на 2 *м* меньше, чем в предыдущую. Через сколько секунд тела встретятся?

762. На складе имелся некоторый запас угля. В первый день со склада было отпущено a тонн угля, а в каждый следующий день отпускалось на d тонн больше, чем в предыдущий, и, таким образом, весь запас угля был отпущен в некоторое число дней. Если бы ежедневно отпускали по b тонн угля, то весь запас был бы отпущен на c дней скорее, чем на самом деле. Сколько тонн угля было на складе и во сколько дней был отпущен весь уголь? Решить задачу в общем виде и вычислить ответ при $a=33$, $b=75$, $c=2$, $d=6$.

763*. Сферические ядра сложены в пирамидальную кучу следующим образом: нижний слой ядер образует квадрат, в каждой стороне которого 10 ядер; на этот слой помещён в промежутках между ядрами второй квадратный слой, содержащий в каждой стороне 9 ядер, и так далее до верхнего слоя, в котором находится 1 шар. Определить, сколько ядер в такой куче.

§ 34. Геометрическая прогрессия.

764. Показать, что числовые значения переменной величины a_n, где n — натуральное число и принимает значения 1, 2, 3, ..., образуют геометрическую прогрессию:

$$1)\ a_n=\frac{3}{5}\cdot 2^n;\quad 2)\ a_n=\frac{5}{2^n};\quad 3)\ a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Дать на числовой оси геометрическое изображение первых пяти членов каждой из этих прогрессий.

765. (Устно.) Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:

$$1)\ a_1=12;\ a_2=9;\qquad 2)\ a_4=20;\ a_5=30;$$

$$3)\ a_8=-40;\ a_9=-80;\qquad 4)\ a_3=\sqrt{2};\ a_4=2;$$

$$5)\ a_n=\sqrt{\frac{3}{2}};\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

766. Написать 4-й и 5-й члены геометрической прогрессии, первые три члена которой следующие числа:

1) $\div\div 6, 18, 54, \ldots;$ 2) $\div\div 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots;$

3) $\div\div \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots;$ 4) $\div\div \sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots.$

5) Вычислить пятый член геометрической прогрессии, в которой первый член равен 3, а знаменатель прогрессии 2.

767. Вычислить шестой член геометрической прогрессии:

1) $\div\div 5, 10, 20, \ldots;$ 2) $\div\div 8, 4, 2, \ldots;$

3) $\div\div 1200, 120, 12, \ldots;$ 4) $\div\div 5\frac{5}{8}, -3\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, \ldots.$

768. 1) Восьмой член геометрической прогрессии равен 256, знаменатель прогрессии 4. Найти первый член этой прогрессии.

2) Найти первый член геометрической прогрессии, в которой:

а) $a_8=384;$ $q=2;$ б) $a_9=\frac{4}{9};$ $q=-\frac{1}{3}.$

769. Найти сумму членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_1=3;$ $q=2;$ $n=6;$

2) $a_1=8;$ $q=\frac{1}{2};$ $n=5;$

3) $a_1=\frac{1}{2};$ $q=-\frac{1}{3};$ $n=6;$

4) $a_1=2{,}5;$ $q=1{,}5;$ $n=5.$

770. Определить знаменатель и сумму членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_1=2;$ $n=7;$ $a_7=1458;$

2) $a_1=1{,}5;$ $n=4;$ $a_4=96;$

3) $a_1=74\frac{2}{3};$ $n=6;$ $a_6=2\frac{1}{3};$

4) $a_1=-1{,}5;$ $n=4;$ $a_4=96.$

771. Определить первый член и сумму членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $q=4;$ $n=7;$ $a_7=1024;$

2) $q=2\frac{1}{2};$ $n=6;$ $a_6=3125;$

3) $q=\frac{1}{2};$ $n=10;$ $a_{10}=7;$

4) $q=\frac{3}{4};$ $n=5;$ $a_5=1\frac{115}{128}.$

772. Определить первый и последний члены геометрической прогрессии, в которой:

1) $n=8;$ $q=2;$ $S_8=765;$

2) $n=5;$ $q=\frac{1}{2};$ $S_5=3\frac{7}{8};$

3) $n=4$; $q=\frac{2}{3}$; $S_4=65$;

4) $n=12$; $q=2$; $S_{12}=4095$.

773. Определить число членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_1=3$; $a_n=96$; $S_n=189$;

2) $a_1=2$; $a_n=\frac{1}{8}$; $S_n=3\frac{7}{8}$;

3) $a_1=1$; $a_n=-512$; $S_n=-341$;

4) $q=2$; $a_n=96$; $S_n=189$.

774. 1) Между числами 9 и 243 поместить два числа, которые образовали бы вместе с данными числами геометрическую прогрессию.

2) Между числами 160 и 5 поместить четыре средних геометрических.

775. Между числами 1 и 7 поместить шесть средних геометрических.

776. В следующих задачах по трём данным величинам определить две остальные:

№	a_1	q	n	a_n	S_n	№	a_1	q	n	a_n	S_n
1	1	3	10			5	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
2		$\frac{1}{2}$	8	2		6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$	
3	2		7	1458		7		-2	19	262144	
4		3		567	847	8		-3	4	121,5	

777. Определить первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_5-a_1=15$; $a_4-a_2=6$;

2) $a_2+a_5-a_4=10$; $a_3+a_6-a_5=20$.

778. Определить первый член, знаменатель и число членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_7-a_5=48$; $a_6+a_5=48$; $S_n=1023$;

2) $a_6-a_4=216$; $a_3-a_1=8$; $S_n=40$.

779. Найти геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трёх первых её членов равна 168, а сумма трёх последних 21.

780. Определить 4 числа, составляющие убывающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних членов этой прогрессии 27, а сумма средних 18.

781. Найти три числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма их 26, а сумма квадратов этих чисел 364.

782. Доказать, что во всякой геометрической прогрессии произведение членов, равноудалённых от начала и от конца её, есть величина постоянная, равная произведению крайних членов.

783. Вывести формулу произведения n членов геометрической прогрессии.

784. Вычислить произведение первых шести членов прогрессии: 1, 4, 16. . . .

785. Найти арифметическую и геометрическую прогрессии, если известно, что первый член каждой прогрессии равен единице, третьи члены обеих прогрессий равны между собой, а 21-й член арифметической прогрессии равен пятому члену геометрической.

786. Первый член арифметической прогрессии и первый член геометрической равны. Первый член арифметической прогрессии равен 3, а второй член её больше второго члена геометрической на 6; третьи члены прогрессий одинаковы. Найти эти прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны.

787. Сумма трёх чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если от первого числа отнять 5, от второго 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

788. Три положительные числа, дающие в сумме 21, составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

789. Три положительные числа, составляющие арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к первому и второму из них прибавить по единице, а к третьему числу прибавить 4, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

790. Сумма трёх чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из этих чисел отнять 1, а от большего 19, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

791. Сумма трёх чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6, и 3, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

792. Найти четыре целых числа, из которых первые три составляют арифметическую, а последние три геометрическую прогрессию; известно, что сумма двух крайних чисел равна 37, а сумма двух средних 36.

793. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию Если из них вычесть соответственно 2, 6, 7 и 2, то вновь полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

794. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из них вычесть соответственно 2, 1, 7 и 27, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

795. Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют первые члены, равные 5; третьи члены этих прогрессий также равны между собой, а второй член арифметической прогрессии на 10 больше второго члена геометрической прогрессии. Найти эти прогрессии.

796*. Некто сообщил новость двум своим знакомым; каждый из них сообщил её тоже двум знакомым и т. д. Полагая, что на каждое сообщение требуется полчаса и что новость сообщают всё новым лицам, определить, через сколько времени всё население города, состоящее из 2 млн. человек, узнает о новости. (Ответ дать с точностью до 1 часа.)

797*. Каждое движение поршня разрежающего насоса удаляет из сосуда $\frac{1}{8}$ находящегося там воздуха. Определить давление воздуха после двадцатого движения поршня, если первоначальное давление было равно 760 *мм.* (Ответ дать с точностью до 1 *мм.*)

798*. Дана прогрессия: $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Образуют ли прогрессию следующие числа, если данная прогрессия: а) арифметическая? б) геометрическая?

1) $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}$; 2) $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$;

3) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$; 4) $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n$;

5) $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}$.

§ 35. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

799. 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$; 2) $16, 4, 1, \dots$;

3) $6\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \dots$; 4) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots$;

5) $1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$; 6) $3\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \dots$.

800. 1) $\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \ldots$; 2) $\sqrt{5}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \frac{1}{25}\sqrt{5}, \ldots$;

3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \ldots$; 4) $1, x, x^2 \ldots$ при $|x|<1$.

801. Найти первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой:

1) сумма четырёх членов равна $33\frac{3}{4}$, а сумма прогрессии 36;

2) сумма прогрессии равна 729, а второй член 162;

3) сумма прогрессии равна 14,4, а знаменатель прогрессии $\frac{3}{8}$;

4) сумма прогрессии равна 10,8, а её знаменатель $\frac{2}{9}$.

802. 1) Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой первый член равен 66, а сумма прогрессии 110.

2) Найти четвёртый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой знаменатель равен 0,4, а сумма прогрессии равна $33\frac{1}{3}$.

803. 1) Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой второй член равен $1\frac{2}{3}$, а знаменатель прогрессии $\frac{2}{3}$.

2) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12,5, а сумма первого и второго членов её 12.

Найти эту прогрессию.

804. Каждую из следующих периодических десятичных дробей представить в виде суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и определить эту сумму:

1) 0,444...; 2) 0,131 313...; 3) 0,523 523 523...; 4) 15,666... .

805. Каждую из следующих смешанных периодических дробей представить в виде суммы двух частей так, чтобы одна из частей представляла сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, и вычислить сумму обеих частей:

1) 0,5777...; 2) 0,4 353 535...; 3) 0,13 888...; 4) 2,6 444... .

806*. Найти сумму ряда:

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots$;

2) $\frac{3}{7}+1+\frac{9}{49}-\frac{1}{3}+\frac{27}{343}+\frac{1}{9}+\ldots$;

3) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

Указание. Каждую дробь представить в виде разности. Например:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \text{ и т. д.}$$

807. В равносторонний треугольник со стороной a вписан посредством соединения середин его сторон новый треугольник; в этот треугольник тем же способом вписан новый треугольник и так далее до бесконечности. Найти предел:

1) суммы периметров этих треугольников;

2) суммы их площадей.

808. В квадрат со стороной a вписан посредством соединения прямыми середин его сторон новый квадрат; в этот квадрат таким же образом вписан квадрат и так далее до бесконечности. Найти предел суммы периметров этих квадратов и предел суммы их площадей.

809. Дан квадрат с диагональю, равной 5 *см*; сторона этого квадрата принимается за диагональ второго квадрата; сторона второго квадрата — за диагональ нового квадрата и т. д. до бесконечности. Определить предел суммы площадей всех этих квадратов.

810. Дан равносторонний треугольник, сторона которого равна a. Из высот этого треугольника строится новый правильный треугольник, из высот второго треугольника строится ещё треугольник и так далее до бесконечности. Определить предел суммы площадей всех построенных таким образом треугольников и предел суммы их периметров.

811. В круг, радиус которого равен R, вписан квадрат; в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и так далее до бесконечности. Определить предел суммы площадей всех кругов и предел суммы площадей всех квадратов.

812. Дан правильный треугольник, сторона которого равна a. В треугольник вписан круг, в круг вписан снова правильный треугольник, в треугольник — круг и так далее до бесконечности. Определить предел суммы площадей всех кругов и предел суммы длин всех окружностей.

813. На стороне угла в 45° взята точка на расстоянии a от вершины. Из этой точки опущен перпендикуляр на вторую сторону, из основания этого перпендикуляра — новый перпендикуляр на первую сторону и так далее до бесконечности. Найти предел суммы длин этих перпендикуляров [1]).

---

[1]) Материал для повторения этой главы помещён в главе XI.

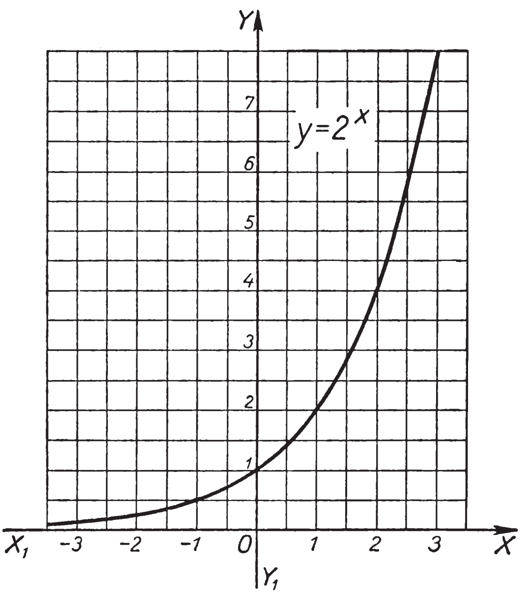
ГЛАВА IX.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ. ЛОГАРИФМЫ.

§ 36. Основные свойства показательной и логарифмической функций.

814. На чертеже 37 изображён график функции $y=2^x$.

1) Определить по графику значения функции y при следующих значениях x: -3, -2, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, и проверить результаты вычислением.



Черт. 37.

2) Показать, что:

а) при любом значении x функция $y>0$;

б) при $x=0$ $y=1$;

в) при $x>0$ $y>1$;

г) при $x<0$ $y<1$;

д) при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y=2^x$ возрастает от 0 до $+\infty$.

815. Пользуясь общими свойствами функции $y=a^x$:

1) Вычертить на одном чертеже графики функций $y=3^x$ и $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, давая x следующие значения:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=3^x$							
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$							

2) Описать: а) общие свойства обеих функций; б) различие свойств функций: $y=3^x$ и $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

3) Построить графики: $y=2^{-x}$; $y=2^{2x}$; $y=2^{x-1}$.

816. 1) Какие из следующих степеней больше единицы, равны единице или меньше единицы: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{7}{8}}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{5}{6}}$; $(2,36)^0$; $(0,12)^{0,2}$?

2) Какое заключение можно сделать относительно чисел m и n, если: а) $\left(\frac{4}{5}\right)^m < \left(\frac{4}{5}\right)^n$; б) $1,5^m < 1,5^n$; в) $(0,3)^m > (0,3)^n$; г) $\left(\frac{8}{3}\right)^m > \left(\frac{8}{3}\right)^n$?

3) Какое заключение можно сделать относительно показателя m, если: а) $10^m=7$; б) $\left(\frac{5}{6}\right)^m=\frac{3}{4}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^m=\frac{5}{2}$; г) $\left(\frac{7}{4}\right)^m=$ $=0,6$?

4) Какое заключение можно сделать относительно положительного основания a, если: а) $a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{5}{4}}$; б) $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{4}{3}}$; в) $a^{-\frac{5}{6}} > a^{\frac{7}{6}}$?

5) Какие значения аргумента x являются допустимыми для функции: а) $y=a^{\frac{2}{x}}$; б) $y=a^{\sqrt[3]{x}}$; в) $y=a^{\sqrt{x}}$; г) $y=a^{\frac{5}{2-x}}$?

817. Следующие равенства переписать в виде логарифмических равенств; например: $5^2=25$; $\log_5 25=2$.

1) $2^3=8$; 2) $6^2=36$; 3) $2^4=16$;

4) $3^4=81$; 5) $4^3=64$; 6) $2^5=32$;

7) $2^{-1}=\frac{1}{2}$; 8) $3^{-2}=\frac{1}{9}$; 9) $4^{\frac{1}{2}}=2$; 10) $27^{\frac{1}{3}}=3$.

818. (Устно.) На основании определения логарифма проверить справедливость следующих равенств:

1) $\log_3 9=2$; 2) $\log_4 16=2$; 3) $\log_5 125=3$;

4) $\log_7 49 = 2$; 5) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 6) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$;

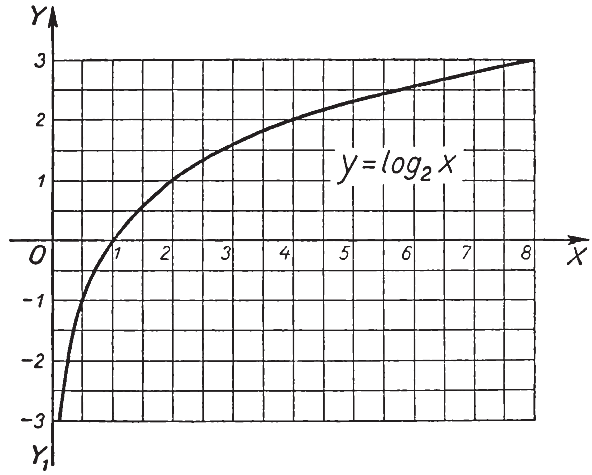
7) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 8) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

819. На чертеже 38 изображён график функции: $y = \log_2 x$.

1) Определить значения функции y при следующих значениях x:

$$8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\quad 1\frac{1}{2},\ 5,\ 6,\ 7.$$

2) Истолковать при помощи графика, что: а) всякое положительное число имеет логарифм и притом только один; б) отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов; в) логарифм 1 равен 0; г) логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны; д) при неограниченном возрастании числа от 0 до $+\infty$ логарифм его неограниченно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.



Черт. 38.

820. 1) Вычертить на одном и том же чертеже графики функций $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, давая x следующие значения:

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$y = \log_3 x$						
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$						

Определить: а) свойства, общие для обеих функций; б) различие свойств функций $y=\log_3 x$ и $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

2) Какое значение аргумента x является допустимым для функций:

а) $y=\log_a(-x)$; б) $y=\log_a(1-x^2)$; в) $y=\log_a(1-x)$; г) $y=\log_a x^2$; д) $y=\log_a(1+x^2)$; е) $y=\log_a \sqrt{x}$?

3) Какое заключение можно сделать относительно логарифмируемых чисел m и n, если: а) $\log_5 m<\log_5 n$; б) $\log_{\frac{1}{2}} m>\log_{\frac{1}{2}} n$; в) $\log_{0,2} m<\log_{0,2} n$?

4) Какое заключение можно сделать относительно логарифмируемого числа m, если: а) $\log_2 m=-0,32$; б) $\log_{\frac{1}{3}} m=\frac{5}{4}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} m=-5\frac{3}{4}$?

5) Какое заключение можно сделать относительно основания логарифмов a, если: а) $\log_a 8=0,3$; б) $\log_a 3=-\frac{1}{5}$; в) $\log_a 5<\log_a 3$; г) $\log_a \frac{3}{4}>\log_a \frac{3}{5}$?

821. (Устно.) Исходя из определения логарифма, решить следующие задачи:

1) Какое число имеет логарифм 2 при основании 7?
2) Какое число имеет логарифм 3 при основании 4?
3) Найти логарифм 100 по основанию 10.
4) Найти логарифм 125 по основанию 5.
5) При каком основании логарифм числа 16 равен 4?
6) При каком основании логарифм числа 1000 равен 3?

822. Найти: 1) $\log_6 36$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_{10} 0,01$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 4$.

823. Найти число x, если: 1) $\log_2 x=5$; 2) $\log_{10} x=-1$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x=-3$; 4) $\log_{\sqrt{2}} x=4$.

824. Найти основание x, если: 1) $\log_x 216=3$; 2) $\log_x \frac{1}{81}=4$; 3) $\log_x \frac{1}{64}=-3$; 4) $\log_x \sqrt{8}=\frac{3}{4}$.

825. Найти число x, если: 1) $\log_5 x=0$; 2) $\log_8 x=1$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} x=-1$; 4) $\log_{0,1} x=-1$.

826. 1) При каком основании логарифм числа 10 равен 10? 2) $\log_x 2=2$? 3) $\log_x \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$? 4) $\log_x n=n$?

На основании тождества $a^{\log_a n}=n$ найти:

827. 1) $2^{\log_2 8}$; 2) $3^{\log_3 9}$; 3) $2^{\log_2 5}$; 4) $3^{\log_3 7}$.

828. 1) $36^{\log_6 2}$; 2) $25^{\log_5 3}$; 3) $81^{0,5\log_9 7}$;
4) $81^{0,5\log_3 7}$; 5) $5^{\log_5 10-1}$; 6) $2^{\log_2 5+1}$.

829. Определить, между какими целыми числами заключаются следующие логарифмы:

1) $\log_2 7$; 2) $\log_{10} 27$; 3) $\log_{10} 0,46$; 4) $\log_2 \frac{1}{5}$.

На основании свойств логарифмической функции определить, что больше:

830. (Устно.) 1) $\log_2 5$ или $\log_2 7$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 6$ или $\log_{\frac{1}{2}} 8$;
3) $\log_7 8$ или $\log_5 8$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 7$ или $\log_{\frac{1}{3}} 7$.

831. 1) $\log_8 9$ или $\log_9 8$; 2) $\log_4 1$ или $\log_5 1$;
3) $\log_5 5$ или $\log_6 6$; 4) $\log_{0,15} 0,15$ или $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$.

Определить x, если:

832. 1) $\log_x \frac{1}{8}=\frac{3}{2}$; 2) $\log_x \frac{1}{27}=-2$; 3) $\log_{3\sqrt[3]{3}} x=-\frac{3}{2}$.

833. 1) $\log_{0,04} 5=x$; 2) $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27}=x$;
3) $\log_x 0,125=-2$; 4) $\log_{3\sqrt{3}} x=-\frac{2}{3}$.

834. 1) $\log_{2\sqrt[3]{2}} \frac{1}{16}=x$; 2) $\log_{4\sqrt[3]{4}} x=-\frac{3}{4}$;
3) $\log_{2\sqrt[3]{5}} x=-6$; 4) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64}=x$;
5) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{8}=x$; 6) $\log_{0,32}\left(\frac{2}{5}\sqrt{2}\right)=x$.

Вычислить:

835. 1) $2\log_5 25+3\log_2 64$; 2) $\log_2\log_2 16$; 3) $5\cdot 3^{\log_3 2}$;
4) $3^{1-\log_3 7}$; 5) $5^{\log_5 8+1}$; 6) $2,4^{\log_{2,4}10+1}$.

836. 1) $(3^{\log_3 5})^2$; 2) $5^{2\log_5 3}$; 3) $4^{3\log_4 2}$; 4) $3^{2-\log_3 10}$.

Определить x из уравнений:

837. 1) $2\log_3 x=3\log_3 x-2$;
2) $5\log_2 x-3\log_7 49=2\log_2 x$;
3) $(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$;
4) $(\log_2 x)^2-\log_2 x-2=0$.

§ 37. Логарифмирование и потенцирование.

838. Пользуясь тождеством $n = a^{\log_a n}$, доказать справедливость следующих формул:

1) $\log_a (nm) = \log_a n + \log_a m$; 2) $\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m$;

3) $\log_a n^k = k \log_a n$; 4) $\log_a \sqrt[k]{n} = \frac{\log_a n}{k}$.

839. Зная, что $\lg 2 = 0{,}3010$, $\lg 3 = 0{,}4771$ и $\lg 5 = 0{,}6990$, найти при том же основании:

$\lg 6$; $\lg 4$; $\lg 12$; $\lg 15$; $\lg 16$; $\lg 20$; $\lg 30$; $\lg 32$;

$\lg \frac{3}{5}$; $\lg \frac{8}{15}$; $\lg 1\frac{2}{3}$; $\lg 4\frac{4}{5}$; $\lg 0{,}6$; $\lg 0{,}12$; $\lg 0{,}08$.

840. (Устно.) Как изменится логарифм данного числа, если, не изменяя основания:
1) число возвести в квадрат? 2) число возвести в куб?
3) извлечь из данного числа квадратный корень?
4) число увеличить в 2 раза? 5) число уменьшить в 5 раз?

Прологарифмировать следующие выражения [1]:

841. 1) $x = abc$; 2) $x = 3cd$; 3) $x = 2(a - b)$;
4) $x = 5(a^2 - b^2)$.

842. 1) $x = \frac{3mn}{5}$; 2) $x = \frac{4cd}{3a}$; 3) $x = \frac{5(a+b)}{a(a-b)}$;

4) $x = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{4abc}$.

843. 1) $x = 5a^2$; 2) $x = 3c^2d$; 3) $x = 13c^4d^3kl^2$.

844. 1) $x = \frac{2r^2}{3(r^2-1)}$; 2) $x = \frac{p^3 \operatorname{tg} \alpha}{abc}$; 3) $x = \frac{10(a^2-b^2)}{3c^3d^4}$.

845. 1) $x = a\sqrt{b}$; 2) $x = m\sqrt[3]{n}$; 3) $x = 3a\sqrt[3]{3b^2}$.

846. 1) $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 2) $x = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b}}$;

3) $x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

4) $x = 3a\sqrt[5]{a^3(a+b)^2}$.

847. 1) $x = 15p^2\sqrt[4]{2p^2(p-q)^3}$; 2) $x = \frac{3mn^2}{4\sqrt{5mn}}$;

3) $x = \frac{6a\sqrt{2(a-b)c}}{5(a-b)^2}$; 4) $x = \left(\sqrt[5]{\frac{a}{2b}}\right)^3$.

---

[1]) В примерах № 841—862 буквенные выражения обозначают положительные числа.

848. 1) $x=\left(\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{3b}}\right)^3$; 2) $x=\frac{a^2\sqrt{\sin\alpha}}{b^3\sqrt[4]{c}}$;

3) $x=m^{-2}n^{-3}$; 4) $x=5p^{-2}\sqrt{\cos 2\alpha}$.

849. 1) $x=3a^{-1}b^{-2}c$; 2) $x=\frac{1}{2}m^{-4}\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}$;

3) $x=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$; 4) $x=\frac{5}{6}s^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2}}$.

850. 1) $x=5p^{-\frac{3}{4}}q^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\frac{2\cos^2\alpha}{3}}$;

2) $x=\frac{m^{-1}\sqrt{5\operatorname{tg}^3\alpha}}{2a^2b}$; 3) $x=\frac{n^{-2}\sqrt[3]{2\sin^2\alpha}}{5m^3n^2}$.

851. 1) $x=\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{b^2}}$; 2) $x=\frac{1}{3}\sqrt{a\sqrt{b}}$;

3) $x=\frac{2}{5}\sqrt[3]{m\sqrt{n}}$; 4) $x=\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$.

852. 1) $x=\frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$; 2) $x=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{a^3b^3\sqrt[4]{c^3}}\right)^3}$;

3) $x=\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}$; 4) $x=\sqrt[5]{\frac{3a^2}{\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}}}$.

853. 1) $x=\sqrt[6]{\frac{5m^3}{\sqrt[3]{\left(\frac{m}{n^2}\right)^2}}}$; 2) $x=\sqrt[n]{a^{12}\sqrt[m]{a^3}}$;

3) $x=\sqrt[-2]{\frac{\sqrt{ab}}{a^{-1}}\cdot\sqrt[-3]{a^{-1}b^{-2}}}$;

4) $x=\sqrt[-3]{\frac{\sqrt{a^{-1}}}{b^{-2}}\cdot\sqrt[-2]{a^{-1}b^{-3}}}$.

854. 1) $x=\sqrt[n+1]{a^n\sqrt[m]{b^{-1}}}$; 2) $x=\sqrt{a}^{\sqrt{a}}$;

3) $x=3^{\sqrt[5]{4}}$; 4) $x=0{,}5^{\sqrt[3]{0{,}4}}$.

855. 1) $x=0{,}8^{\sqrt[4]{0{,}5}}$; 2) $x=\log(a^2)$;

3) $x=\log(5^{\sqrt[3]{4}})$; 4) $x=\log(\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}})$.

856. 1) $x=\log(1{,}6^{\sqrt[3]{1{,}2}})$; 2) $x=\frac{5\log m}{\log(m^3)}$;

3) $x=\log\sqrt{\log 3}$; 4) $x=\log\sqrt{(a+b)^{\log(a+b)}}$.

Найти x по данному его логарифму:

857. 1) $\log x = \log b + \log c$; 2) $\log x = \log m - \log n$;
3) $\log x = 5 \log a$; 4) $\log x = 2 \log a + 3 \log b$.

858. 1) $\log x = 3 \log m - 4 \log n$;
2) $\log x = \frac{1}{2} \log a$; 3) $\log x = \frac{1}{2} (\log m + \log n)$;
4) $\log x = 2 \log a + 3 \log b - 5 \log c$.

859. 1) $\log x = 3 \log (a + b) - 2 \log (a - b)$;
2) $\log x = \frac{1}{2} \log (m - n) - \frac{1}{3} \log (m + n)$;
3) $\log x = \frac{2}{3} \log a + \frac{8}{5} \log b$; 4) $\log x = \frac{3 \log a}{2} - \frac{4 \log b}{3}$;
5) $\log x = \frac{2 \log m}{5} - \frac{3 \log n}{4}$.

860. 1) $\log x = 2 \log (a + b) - \frac{2}{3} \log (a - b) + \frac{1}{2} \log a$;
2) $\log x = \frac{1}{2} \log (a - b) - \frac{2}{5} \log (a + b) - \frac{2}{3} \log a$;
3) $\log x = \frac{2}{3} (\log a + \log b)$; 4) $\log x = \frac{3}{4} (\log m - \log n)$.

861. 1) $\log x = \log (a - b) + \frac{1}{3} (2 \log a + 3 \log b)$;
2) $\log x = \log (c + d) - \frac{3}{4} (3 \log c - 2 \log d)$;
3) $\log x = \log a + n \log (a + b) - \frac{1}{n} \log (a - b)$;
4) $\log x = \log b - \frac{1}{m} \log (b - c) + m \log (b + c)$.

862. 1) $\log x = 5 \log m + \frac{1}{2} \Big[\log (m + n) + \frac{1}{3} \log (m - n) -$
$- \log m - \log n\Big]$;
2) $\log x = \frac{2}{3} \Big[\log k + \frac{4}{3} \log (k + l) - 2 \log (k - l)\Big] -$
$- \frac{1}{2} \log l$;
3) $\log x = - \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{4} \Big[\log b - \frac{2}{3} \log a +$
$+ \frac{2}{3} \log (a - b) - \frac{1}{2} \log (a + b)\Big]$;
4) $\log x = - \log (a + b) + \frac{2}{5} \Big[2 \log a + \frac{1}{2} \log b -$
$- \frac{1}{3} (\log a - \log b) - \log a\Big]$.

§ 38. Десятичные логарифмы[1]).

863. (Устно.) Найти логарифмы следующих чисел:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,001; 4) 0,0001; 5) 0,00001.

864. (Устно.) Зная, что $\lg 2 = 0{,}3010$, найти логарифмы чисел:

1) 20; 2) 200; 3) 2000; 4) 20 000; 5) 2 000 000;
6) 0,2; 7) 0,02; 8) 0,002; 9) 0,0002; 10) 0,00002.

865. Следующие логарифмы выразить отрицательными числами:

1) $\bar{1},3235$; 2) $\bar{2},5638$; 3) $\bar{1},8436$; 4) $\bar{2},4957$;
5) $\bar{3},6472$; 6) $\bar{4},9879$; 7) $\bar{1},8978$; 8) $\bar{5},4989$.

866. Преобразовать в искусственную форму логарифмы:

1) —0,3678; 2) —0,5763; 3) —0,7459; 4) —1,5297;
5) —1,8394; 6) —2,5878; 7) —3,0251; 8) —4,3001;
9) —0,2310; 10) —0,0840; 11) —2,0900; 12) —1,0101.

Найти логарифмы чисел (по таблицам):

867. 1) 5; 2) 7; 3) 13; 4) 78; 5) 125; 6) 240; 7) 509; 8) 646; 9) 749; 10) 989.

868. 1) 0,7; 2) 0,015; 3) 2,4; 4) 25,6; 5) 0,146; 6) 0,497; 7) 0,0084; 8) 0,0567; 9) 1,02; 10) 4,09; 11) 0,208; 12) 0,0000496; 13) 0,0000809.

869. 1) 5436; 2) 7132; 3) 1508; 4) 8091; 5) 24,16; 6) 342,3; 7) 2,197; 8) 1,674; 9) 0,5379; 10) 0,9032; 11) 0,04635; 12) 0,06483; 13) 0,001528; 14) 0,0006384.

870. 1) 24 868; 2) 57 384; 3) 28,157; 4) 152,59; 5) 1,7384; 6) 0,49276; 7) 893,75; 8) 0,063815; 9) 1,0053; 10) 237 628; 11) 236,743; 12) 32,15475; 13) 1,067476; 14) 0,547963; 15) 0,0152396.

871. Найти числа, соответствующие следующим логарифмам:

1) 1,7482; 2) 0,4362; 3) $\bar{1},6415$; 4) 2,6149;
5) 3,2648; 6) $\bar{2},8176$; 7) $\bar{3},9340$; 8) $\bar{4},7267$;
9) 0,9236; 10) $\bar{1},1015$; 11) $\bar{2},6995$; 12) 1,5419.

Выполнить следующие действия над логарифмами:

872. 1) $\bar{1},5436 + 2,3892$; 2) $\bar{1},1546 + \bar{2},9835$;
3) $0,7658 - 1,3456$; 4) $\bar{1},2396 - 0,7459$;

---

[1]) Если нет особой оговорки, данные считать точными, а результат находить с той точностью, с какой это возможно при пользовании четырёхзначными таблицами логарифмов.

5) $0,1518-\bar{1},2836$; 6) $0,3215-\bar{2},9217$;
7) $\bar{1},1631-\bar{1},9448$; 8) $\bar{2},1271-\bar{3},2348$;
9) $0,2911-2,3662$; 10) $\bar{1},2117+2,5279$;
11) $1-\bar{1},2812$; 12) $2-\bar{2},1534$.

873. 1) $\bar{1},2432\cdot 3$; 2) $\bar{1},9272\cdot 2$; 3) $0,1546\cdot(-2)$;
4) $\bar{1},7638\cdot(-3)$; 5) $\bar{1},2932\cdot(-0,3)$; 6) $2,5416\cdot(-1,2)$;
7) $2,1562\cdot\frac{2}{3}$; 8) $1,5678\cdot\frac{3}{4}$.

874. 1) $\bar{2},2817:2$; 2) $\bar{1},2462:2$; 3) $\bar{1},1536:3$; 4) $\bar{2},6483:3$;
5) $\bar{1},7235:4$; 6) $\bar{2},8478:4$; 7) $\bar{1},3243:(-2)$;
8) $\bar{1},6274:(-3)$; 9) $\bar{1},8236:(-0,2)$;
10) $\bar{2},6548:(-0,3)$.

875. При каких значениях x справедливы неравенства:

1) $\lg x>3$; 2) $\lg(-x)>3$;
3) $\lg(x^2)>3$; 4) $\lg^2 x>3$;
5) $\lg x<2\lg x$; 6) $\lg x>2\lg x$.

876. (Устно.) Что можно сказать о двух числах, десятичные логарифмы которых имеют:
1) одни и те же характеристики; 2) одни и те же мантиссы?

877. Даны $\lg 2$ и $\lg 3$. Логарифмы каких чисел от 1 до 100 можно вычислить без таблиц?

878. Определить число цифр в числе 2^{100}, если известно, что $\lg 2=0,3010$.

879. Какие числа не имели бы десятичных логарифмов, если бы мы знали только степени с положительными показателями?

880. Какой ряд представляют логарифмы последовательных членов геометрической прогрессии?

881. Найти ошибку в следующих преобразованиях.

Дано тождество: $\lg\frac{1}{3}=\lg\frac{1}{3}$; удвоив левую часть, а правую оставив без изменения, получим:
$2\lg\frac{1}{3}>\lg\frac{1}{3}$; $\lg\left(\frac{1}{3}\right)^2>\lg\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}>\frac{1}{3}$. Где ошибка?

Вычислить при помощи таблиц логарифмов:

882. 1) $24,5\cdot 1,57$; 2) $0,046\cdot 2,86$; 3) $4,134:0,1548$;
4) $12,78:3,392$; 5) $8,576^3$; 6) $2,036^4$.

883. 1) $\sqrt[3]{15,36}$; 2) $\sqrt[3]{2,376}$;
3) $\frac{154,8\cdot 5,436}{12,72}$; 4) $\frac{54,83\cdot 1,367}{2,832}$.

884. 1) $\frac{103,8\cdot 20,97}{5,174\cdot 13,62}$; 2) $\frac{9,738\cdot 21,09}{48,72\cdot 0,8478}$;

3) $3\sqrt[4]{273,5}$; 4) $0,156\cdot\sqrt[5]{85,74}$.

885. 1) $\frac{92,17^2\cdot 5,14^3}{2,184^4\cdot 0,5836^2}$; 2) $\frac{1,894^4\cdot 23,4^3}{44,15^2\cdot 0,9647}$;

3) $\sqrt[3]{5862^2}$; 4) $\sqrt[5]{13,76^3}$.

886. 1) $\sqrt[3]{\frac{0,1532^2}{2,74}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{674,2}{2,73^3}}$;

3) $\frac{8,15^2\cdot\sqrt[3]{14,36}}{24,38\cdot\sqrt{8,734}}$; 4) $\frac{12,48^3\cdot\sqrt[4]{5,76}}{1,842\cdot\sqrt[3]{673,8}}$.

887. 1) $\frac{2,934^3\ \sqrt[3]{123,4^2}}{1,124^2\cdot\sqrt[5]{0,084}}$; 2) $\frac{0,897^2\cdot\sqrt[4]{0,0792}}{2,15^3\cdot\sqrt[3]{12,76^2}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{1,56^3\cdot\sqrt[5]{0,14}}{0,8942}}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{2,591^4\cdot\sqrt[3]{0,0836}}{1,147^2}}$.

888. 1) $(0,461)^{0,461}$; 2) $(0,171)^{1,163}$;

3) $(0,273)^{1,573}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{0,2073}$.

889. 1) $\sqrt[3]{-18,34}$; 2) $\sqrt[5]{-0,249}$;

3) $(-5,32)^3\cdot\sqrt[4]{0,0294}$; 4) $\frac{3,89^{-2}\cdot\sqrt[3]{-0,1536}}{0,924^2}$;

5) $\frac{0,01^{-3}\cdot\sqrt[-2]{2,72}}{\sqrt[5]{-2,963}}$; 6) $\sqrt[-3]{\frac{-0,415^{-2}}{\sqrt{5,48}}}$.

Вычислить следующие выражения путём логарифмирования по частям:

890. 1) $\sqrt[3]{0,836}+\sqrt[4]{2,324}$; 2) $\sqrt[3]{79,836+\sqrt{156,374}}$;

3) $\frac{1,592^2}{\sqrt[3]{0,382}}+\frac{\sqrt[4]{0,08964}}{0,5348^3}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{12,4+0,6\sqrt[3]{0,0548}}{0,3897^2}}$.

891. 1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt[3]{5}}{1-0,1845^2}$; 2) $\frac{\sqrt{236,46^2-132,34^2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[5]{3}}$;

3) $\frac{4-0,0186^2}{\sqrt{0,1}-\sqrt{10}}$; 4) $\sqrt[3]{1-4,2013\sqrt[3]{0,1}}$.

892. 1) $\sqrt[10]{10+\sqrt[10]{10}}$; 2) $\sqrt[5]{1-7,002\sqrt[3]{,01}}$;

3) $1-(\sqrt[6]{0,6})^{3,3}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{25-\sqrt[7]{-136}}{0,00034}}$.

893. 1) $\sqrt[3]{\lg 0,8}$; 2) $144,4+\sqrt[3]{\lg 0,2-\lg\sqrt{0,1}}$;

3) $(1+\sqrt[5]{\lg 2})^{\frac{3}{0,2}}$; 4) $(1+\sqrt[3]{\lg 3})^{\frac{2}{0,5}}$.

894. 1) Найти площадь круга, радиус которого $R=15{,}62$ *см*.

2) Вычислить длину окружности, если площадь круга равна $0{,}5676$ *м*^{2}.

3) Найти объём V прямой призмы, основанием которой служит квадрат со стороной $a\approx 0{,}567$ *м*, а высота призмы $h\approx 4{,}09$ *м*.

4) Вычислить площадь кольца, внутренний диаметр которого $d\approx 5{,}21$ *м*, а внешний диаметр $D\approx 7{,}30$ *м*.

895. 1) Вычислить площадь треугольника со сторонами: $897{,}5$ *м*; $786{,}3$ *м*; $645{,}6$ *м*.

2) Найти ребро куба, имеющего объём $V=12{,}4$ *см*^{3}.

3) Найти ребро куба, имеющего объём, в 5 раз больший объёма куба с ребром, равным $24{,}3$ *см*.

4) Пользуясь формулой равноускоренного движения $s=\frac{gt^2}{2}$, найти путь s, пройденный телом в течение 15 сек., если ускорение $g=9{,}8\frac{м}{сек^2}$.

896. 1) Вычислить объём шара по формуле $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, если $R=12{,}46$ *м*.

2) Зная, что объём V цилиндра вычисляется по формуле $V=\pi R^2H$, где R — радиус основания цилиндра, H — его высота, определить вес 1000 *м* медной проволоки диаметром $d\approx 2{,}00$ *мм* $\left(\text{удельный вес } 8{,}55\frac{Г}{см^3}\right)$.

3) Моток стальной проволоки диаметром $d\approx 2{,}50$ *мм* весит $15{,}8$ *кг*. Найти длину этой проволоки, если удельный вес стали равен $7{,}96\frac{Г}{см^3}$.

4) Объём V полого цилиндра вычисляется по формуле $V=\pi(R^2-r^2)H$, где R — внешний радиус основания цилиндра, r — внутренний радиус, H — высота цилиндра.

Вычислить вес свинцовой трубы длиной $l\approx 4{,}375$ *м*, если внешний и внутренний диаметры её равны соответственно $R\approx 13{,}6$ *см* и $r\approx 12{,}5$ *см*, а удельный вес свинца равен $11{,}3\frac{Г}{см^3}$.

897. При помощи таблиц логарифмов найти x, если:

1) $\log_2 x=\overline{1},1459$; 2) $\log_5 x=\overline{1},1236$;

3) $\log_{100} x=\overline{1},0492$; 4) $\log_{0,1} x=2{,}67$.

898. Вычислить при помощи таблиц десятичных логарифмов:
1) $\log_4 0{,}015$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 1000$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}001$; 4) $\log_{0,002} 0{,}02$.

899*. 1) Доказать, что логарифм числа по „новому основанию" равен логарифму того же числа по „старому основанию", делённому на логарифм „нового основания" по „старому", т. е. $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

2) Доказать, что отношение логарифмов двух данных чисел одинаково при любом основании, т. е. $\frac{\log_a N}{\log_a M}=\frac{\log_b N}{\log_b M}$.

3) Доказать, что $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$.

4) Доказать, что $\log_{a^k} N=\frac{\log_a N}{k}$.

900*. Пользуясь таблицами десятичных логарифмов и формулами, данными в предыдущей задаче, вычислить:

1) $\log_2 15$; 2) $\log_{100} 25$;
3) $\ln 8$[1]; 4) $\ln 24$.

Сравнить найденные натуральные логарифмы с теми их значениями, которые приведены в «Четырёхзначных математических таблицах» В. М. Брадиса.

§ 39. Показательные и логарифмические уравнения.

Решить показательные уравнения:

901. 1) $5^x=625$; 2) $3^x=243$; 3) $2^{-x}=16$;
4) $3^{-x}=81$; 5) $8^x=32$; 6) $9^x=27$.

902. 1) $25^x=\frac{1}{5}$; 2) $49^x=\frac{1}{7}$; 3) $2^{x+1}=32$;
4) $3^{2x-1}=81$; 5) $\sqrt{5^x}=\sqrt[3]{25}$; 6) $\sqrt[4]{7^x}=\sqrt[5]{343}$.

903. 1) $\sqrt[4]{a^{x+1}}=\sqrt[3]{a^{x-2}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^5$;
3) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^8$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$.

904. 1) $2^{x-2}=1$; 2) $3^{2x-1}=1$;
3) $a^{(x-2)(x-3)}=1$; 4) $a^{(x-1)(x+2)}=1$.

905. 1) $1000\cdot\sqrt[x]{0,1}=100^x$; 2) $\sqrt[x]{27^{2x-1}}=\sqrt{9^{2x-1}}$;
3) $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; 4) $(0,25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}}$.

906. 1) $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$;
2) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$; 3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$;
4) $2^x\cdot 5^x=0,1\cdot(10^{x-1})^5$.

907*. 1) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36$;
2) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}-\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}=0$.

---

[1]) ln — натуральный логарифм при основании $e\approx 2,7183$.

908. Следующие показательные уравнения решить при помощи таблиц логарифмов:

1) $10^x = 300$; 2) $3^x = 12$; 3) $2^x = 10$; 4) $10^{4x} = 5{,}75$.

909. Построить график показательной функции $y = 2^x$ и при помощи графика решить уравнения:

1) $2^x = 3$; 2) $2^x = 5$; 3) $2^x = 0{,}5$; 4) $2^x = 2{,}5$.

Решить данные уравнения при помощи таблиц логарифмов и результаты сравнить с графическим решением.

Следующие показательные уравнения решить способом вынесения общего множителя за скобки:

910. 1) $3^{x+1} + 3^x = 108$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 96$;
3) $7^x - 7^{x-1} = 6$; 4) $2^x - 2^{x-2} = 3$.

911. 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$; 2) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;
3) $3^{2z-1} + 3^{2z-2} - 3^{2z-4} = 315$; 4) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$.

912. 1) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$;
2) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;
3) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
4) $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0{,}5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$.

913. 1) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$;
2) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$.

Решить показательные уравнения приведением их к виду

$$a^{2x} + a^x = b.$$

914. 1) $3^{2x} - 3^x = 702$; 2) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$;
3) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$; 4) $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 1323 = 0$.

915. 1) $4^x + 2^{x+1} = 80$; 2) $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$;
3) $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$; 4) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

916. 1) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$; 2) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$.

Решить логарифмические уравнения:

917. 1) $\lg x = 2 - \lg 5$;

2) $\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = 2 - \lg 25$;

3) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$; 4) $\dfrac{\lg x}{1 - \lg 2} = 2$.

918. 1) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$;

2) $\lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$;

3) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$; 4) $2\lg x = -\lg(6 - x^2)$.

919. 1) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$;

2) $0{,}5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1$;

3) $\lg\lg\lg x=0$; 4) $\log_2\log_3\log_4 x=0$.

Решить уравнения:

920. 1) $x^x=x$; 2) $x^{\lg x}=10$; 3) $x^{\lg x+2}=1000$;

4) $x^{2-\frac{\lg x}{2}}=100$.

921. 1) $\lg x^{\lg x}=1$; 2) $100^{\lg(x+20)}=10\,000$;

3) $0{,}1\,x^{\lg x-2}=100$; 4) $(0{,}1)^{-(x^2-5x+8)}=100$.

922. 1) $\lg 9^{-1}+x\lg\sqrt[3]{3^{5x-7}}=0$; 2) $x^{1-0{,}25\lg x}=10$;

3) $\lg\left(3\sqrt{\frac{x(x-4)}{x-3}}+1\right)=1$; 4) $\lg 10^{\lg(x^2+21)}-1=\lg x$.

923*. Решить следующие уравнения, используя формулу перехода от одной системы логарифмов к другой:

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}:$$

1) $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}} x-\log_{\frac{1}{3}} x=6$;

2) $2\log_4 x+2\log_x 4=5$; 3) $2\log_x 25-3\log_{25} x=1$;

4) $\log_2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)=9$;

5) $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

Решить системы уравнений:

924. 1) $\begin{cases} 9^{x+y}=729, \\ 3^{x-y-1}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=90, \\ \lg x+\lg y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lg x+\lg y=5, \\ \lg x-\lg y=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^y-y^x=0, \\ x^2-y^3=0. \end{cases}$

925. 1) $\begin{cases} 14^x-63y=0, \\ 17^x-87y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{x+y}-y^{12}=0, \\ y^{x+y}-x^3=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y, \\ y^{\sqrt{y}}=x^4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=512, \\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 2. \end{cases}$

926. 1) $\begin{cases} \log_x\log_2\log_x y=0, \\ \log_y 9=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=40, \\ x^{\lg y}=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=12, \\ 3^{\lg(2y-x)}=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}, \\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=3. \end{cases}$

ГЛАВА X.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА.

§ 40. Вычисления при помощи счётной логарифмической линейки.

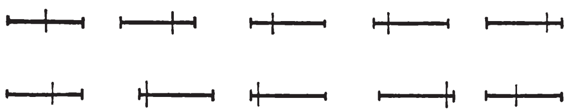
927. Отметить визиром бегунка на основной шкале линейки следующие числа:

1) 123; 15,3; 0,186; 1,34; 1,08; 104; 175; 0,0135; 0,00159.

2) 254; 2,76; 3,28; 0,294; 0,362; 3,08; 2,04; 0,206; 0,0304.

3) 465; 0,655; 8,35; 53,5; 0,735; 0,0945; 8,05; 5,05; 0,905; 0,0915; 0,00995.

928. На чертеже 39 изображены отрезки длиной по 1 *см*. Определить на глаз, сколько десятых долей сантиметра заключено между началом и вертикальной чертой каждого отрезка. Проверить результаты отсчёта измерением.



Черт. 39.

929. Начертить отрезок прямой длиной 10 *см*, отметив на нём точки от 0 до 10 через каждый сантиметр. На полученном отрезке отметить на глаз точки, соответствующие следующим числам, проверяя правильность результата измерением: 2,5; 6,5; 0,5; 1,25; 8,75; 0,3; 2,3; 7,8; 9,3; 5,2; 8,2; 3,7; 4,7; 0,2; 1,4; 5,6; 3,1; 8,1; 4,1; 7,9; 9,9; 1,9; 1,1.

930. Отметить визиром бегунка на основной шкале линейки следующие числа: 2,31; 0,351; 26,1; 3,71; 3,01; 0,201; 4,53; 0,683; 74,6; 5,08; 0,401; 84,9; 0,958; 0,0819; 0,0903; 1,2; 1,02; 2,01; 2,02.

931. Следующие числа отметить на основной шкале левым концом движка: 1,36; 2,74; 35,8; 495; 0,531; 0,0153; 83,5; 23,7; 9,03; 0,0353.

932. Следующие числа отметить на основной шкале правым концом движка, округляя их: 0,5781; 42,36; 0,001991; 89,567; 0,02516; 15,478; 683,75; 9,8363; 10,101.

933. При помощи счётной линейки выполнить умножение следующих чисел:

1) $1,2 \cdot 5$; $2,6 \cdot 4$; $14,1 \cdot 6$; $1,84 \cdot 3$; $0,132 \cdot 5$; $15,6 \cdot 4$.

2) $5,4 \cdot 6$; $7,3 \cdot 8$; $3,56 \cdot 9$; $6,2 \cdot 8$; $24,8 \cdot 6$; $0,43 \cdot 7$; $0,538 \cdot 8$.

934. Выполнить умножение чисел при помощи счётной линейки, заполняя следующую таблицу:

№ п/п	Пример	Сдвиг движка	Ответ	№ п/п	Пример	Сдвиг движка	Ответ
1	$0,015 \cdot 3,5$	Вправо	0,0525	7	$0,095 \cdot 17,8$		1,689
2	$2,96 \cdot 7,5$	Влево	22,2	8	$6,55 \cdot 2,42$		15,85
3	$6,98 \cdot 3,05$		21,3	9	$0,546 \cdot 91,8$		50,1
4	$0,433 \cdot 19,8$		8,57	10	$0,016 \cdot 0,173$		0,00277
5	$1,54 \cdot 3,26$		5,02	11	$536 \cdot 0,154$		82,6
6	$2,18 \cdot 4,65$		10,14	12	$0,202 \cdot 29,8$		6,02

935. При помощи линейки выполнить умножение следующих чисел:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	$25,6 \cdot 4,9$	125,4	7	$0,041 \cdot 0,00561$	0,000230
2	$14,3 \cdot 43,5$	622	8	$54,2 \cdot 0,43$	23,3
3	$1,21 \cdot 3,75$	4,54	9	$0,23 \cdot 0,017$	0,00391
4	$3,54 \cdot 87$	308	10	$0,0175 \cdot 0,41$	0,00718
5	$0,37 \cdot 0,82$	0,303	11	$12,71 \cdot 8,92$	113,4
6	$621 \cdot 5,71$	3550	12	$21,76 \cdot 29,75$	647

936. При помощи линейки найти длину окружности по данному диаметру d, пользуясь особой меткой для π и проверяя ответы по математическим таблицам:

d	1,53	25,4	3,48	0,254	16,7	8,36	54,8	0,635	74,5
$C = \pi d$	4,81								

937. При помощи счётной линейки выполнить деление следующих чисел: $5,6:4$; $0,66:3$; $4,8:1,2$; $0,735:0,7$; $0,36:9$; $12,3:3$; $5,6:0,8$; $32:6,4$.

938. При помощи счётной линейки выполнить деление чисел, заполнив следующую таблицу:

№ п/п	Пример	Сдвиг движка	Ответ	№ п/п	Пример	Сдвиг движка	Ответ
1	72,4 : 2,56	Вправо	28,3	6	77,3 : 0,546		141,6
2	635 : 72	Влево	8,82	7	0,439 : 264		0,001662
3	0,541 : 0,0238		22,7	8	0,321 : 0,0125		25,7
4	54,2 : 6,92		7,83	9	0,004 : 0,0637		0,0628
5	0,197 : 143		0,001378	10	0,0921 : 0,176		0,523

939. При помощи счётной линейки выполнить деление следующих чисел:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	438 : 192	2,28	8	0,321 : 0,546	0,588
2	736 : 881	0,836	9	7,01 : 6,17	1,136
3	64,2 : 135	0,476	10	51,1 : 43,2	1,183
4	741 : 5,48	135	11	1,17 : 8,45	0,1385
5	35,5 : 43,1	0,824	12	6,32 : 1,84	3,43
6	6,81 : 7,95	0,857	13	4,36 : 0,562	7,76
7	546 : 8,43	64,8			

940. При помощи счётной линейки вычислить произведение следующих чисел, не читая промежуточных результатов:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	0,124 · 1,07 · 73,5	9,75	4	2,94 · 3,66 · 0,65	6,99
2	4,3 · 73,5 · 0,124	39,2	5	6,66 · 5,55 · 0,223	8,25
3	2,65 · 1,32 · 0,75	2,62	6	7,78 · 14,5 · 0,00191	0,215

941. Вычислить вес сосновой доски длиной 4,75 *м*, толщиной 6,5 *см*, шириной 45 *см*, зная, что удельный вес сосны 0,56 $\frac{г}{см^3}$.

942. Сколько нужно асфальта на покрытие двора слоем толщиной в 1,2 *см*, если длина двора 137 *м*, а ширина 48 *м*. Удельный вес асфальта 1,10 $\frac{г}{см^3}$.

943. При помощи счётной линейки выполнить следующие действия, не читая промежуточных результатов:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	$\frac{0{,}215 \cdot 17{,}5}{0{,}019}$	198	4	$\frac{108 \cdot 0{,}208}{3080}$	0,00729
2	$\frac{1{,}05 \cdot 42{,}4}{157}$	0,284	5	$\frac{5{,}05 \cdot 0{,}00836}{194}$	0,000218
3	$\frac{0{,}0743 \cdot 4{,}36}{0{,}00045 \cdot 23{,}8}$	30,2	6	$\frac{54{,}2 \cdot 0{,}42}{0{,}0154}$	1480

Указание. Выгоднее выполнять сначала деление, а потом умножение.

944. Следующие пропорции решить при помощи счётной линейки:

1) $\frac{0{,}15}{x}=\frac{3}{8}$; 2) $\frac{0{,}56}{1{,}5}=\frac{2{,}0}{x}$; 3) $\frac{0{,}0406}{1890}=\frac{0{,}000542}{x}$; 4) $\frac{x}{4{,}15}=\frac{14{,}7}{18{,}9}$;

5) $\frac{27{,}3}{4{,}2}=\frac{x}{5{,}4}$; 6) $\frac{1{,}15}{0{,}032}=\frac{x}{0{,}7}$; 7) $\frac{x}{3{,}4}=\frac{8{,}2}{15{,}2}$.

945. Вычислить при помощи счётной линейки квадраты данных чисел:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	$43{,}1^2$	1860	7	$0{,}0308^2$	0,000949
2	$2{,}96^2$	8,76	8	$57{,}4^2$	3290
3	$13{,}5^2$	182	9	417^2	174000
4	$15{,}35^2$	236	10	$0{,}0841^2$	0,00707
5	$4{,}35^2$	18,9	11	$1{,}09^2$	1,19
6	$0{,}222^2$	0,0493	12	$0{,}066^2$	0,00436

946. Вычислить при помощи счётной линейки квадратные корни из данных чисел:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	$\sqrt{742}$	27,2	6	$\sqrt{43{,}5}$	6,60
2	$\sqrt{0{,}426}$	0,653	7	$\sqrt{0{,}6327}$	0,795
3	$\sqrt{1742}$	41,7	8	$\sqrt{0{,}0354}$	0,1884
4	$\sqrt{176{,}2}$	13,28	9	$\sqrt{0{,}00141}$	0,0376
5	$\sqrt{4{,}321}$	2,08	10	$\sqrt{0{,}00342}$	0,0585

947. Вычислить при помощи счётной линейки кубы данных чисел:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	$0{,}213^3$	0,00966	7	$0{,}0184^3$	0,00000624
2	$4{,}35^3$	82,3	8	$79{,}4^3$	501000
3	$0{,}54^3$	0,157	9	$1{,}47^3$	3,18
4	$14{,}32^3$	2950	10	$2{,}62^3$	18,0
5	$8{,}95^3$	715	11	$5{,}88^3$	203
6	$0{,}494^3$	0,120	12	$9{,}24^3$	789

948. Вычислить при помощи счётной линейки кубические корни из данных чисел:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	$\sqrt[3]{0{,}105}$	0,472	6	$\sqrt[3]{19{,}7}$	2,70
2	$\sqrt[3]{4910}$	17,0	7	$\sqrt[3]{0{,}000184}$	0,0569
3	$\sqrt[3]{0{,}0176}$	0,260	8	$\sqrt[3]{0{,}12}$	0,493
4	$\sqrt[3]{350}$	7,05	9	$\sqrt[3]{0{,}0000098}$	0,0214
5	$\sqrt[3]{0{,}262}$	0,640	10	$\sqrt[3]{82}$	4,34

949. Выполнить при помощи счётной линейки следующие действия:

№ п/п	Пример	Ответ	№ п/п	Пример	Ответ
1	$\dfrac{4{,}56 \cdot \sqrt{18{,}9}}{0{,}00735 \cdot 8{,}07}$	334	3	$\dfrac{1920 \cdot 0{,}00509 \cdot \sqrt{6{,}24}}{4{,}07 \cdot 70}$	0,0857
2	$\dfrac{6{,}08 \cdot \sqrt[3]{0{,}0495}}{15{,}8 \cdot 0{,}00834}$	16,9	4	$\dfrac{50{,}8 \cdot 0{,}0375 \cdot \sqrt[3]{4{,}95}}{1860 \cdot 0{,}00356 \cdot 4{,}03}$	0,122

950. При помощи счётной линейки вычислить площадь круга по данному диаметру, пользуясь особой меткой c.

Проверить ответы по математическим таблицам.

Диаметр	2,4	1,83	0,82	0,486	73,5
Площадь круга по линейке	4,52				
Площадь круга по таблицам	4,524				

951*. 1) Найти при помощи счётной линейки логарифмы следующих чисел, проверяя результат по математическим таблицам:

$$\lg 5;\quad \lg 12;\quad \lg 35;\quad \lg 236;$$

$$\lg 1542;\quad \lg 0{,}184;\quad \lg 0{,}0894.$$

2) Найти при помощи счётной линейки числа, соответствующие следующим логарифмам:

$$0{,}384;\quad 1{,}836;\quad 2{,}543;$$

$$\overline{1},614;\quad \overline{2},975;\quad \overline{3},267.$$

952*. Вычислить при помощи счётной линейки:

1) $0{,}489^{0{,}285}$; 2) $0{,}62^{0{,}91}$; 3) $0{,}215^{0{,}505}$; 4) $0{,}064^{0{,}0521}$.

ГЛАВА XI.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА IX КЛАССА.

953. Найти пределы следующих переменных величин:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{2x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x+1}$.

954. Написать первые 8 членов геометрической прогрессии, в которой произведение первых двух членов равно $\left(-\frac{1}{8}\right)$, а произведение первого члена на пятый равно $\frac{1}{64}$.

955. В геометрической прогрессии 5 членов, сумма которых за исключением первого равна 195, а за исключением последнего 130. Вычислить крайние члены прогрессии.

956. Найти сумму первых 6 членов геометрической прогрессии, в которой произведение первого члена на третий равно $\frac{1}{144}$, а сумма третьего члена с четвёртым равна 1.

957. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 28, а сумма следующих трёх членов равна $3\frac{1}{2}$. Найти восьмой член прогрессии.

958. Найти сумму девяти членов арифметической прогрессии, шестой член которой равен 5, а сумма третьего и восьмого членов равна тоже 5.

959. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма её первых четырёх членов равна 26, сумма последних четырёх членов 110, а сумма всех членов 187.

960*. 1) Найти сумму n членов ряда

$$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\ldots.$$

2) Найти сумму n членов ряда

$$7+77+777+\ldots.$$

961. Доказать, что если три числа x, y, z составляют геометрическую прогрессию, то

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

962. Построить графики функций:

$$1)\ y=2\cdot 3^x;\quad 2)\ y=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x;\quad 3)\ y=2^{x^2};$$

$$4)\ y=\frac{1}{2}\lg x;\qquad 5)\ y=\lg(2-x).$$

963. Какое заключение можно сделать относительно чисел m и n, если:

1) $2{,}5^m<2{,}5^n$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^m<\left(\frac{3}{4}\right)^n$; 3) $\log_2 m>\log_2 n$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} m>\log_{\frac{1}{2}} n$; 5) $\log_m 5{,}4<\log_n 5{,}4$; 6) $\log_m\frac{1}{4}>\log_n\frac{1}{4}$.

964. Какое заключение можно сделать относительно числа m, если:

1) $\log_5 m=-0{,}2$; 2) $\log_{0,2} m=1\frac{1}{4}$; 3) $\log_m 4=0{,}5$;

4) $\log_m 0{,}5=2$; 5) $m^{\frac{3}{4}}<m^{\frac{5}{4}}$; 6) $m^{-\frac{5}{6}}>m^{-\frac{7}{6}}$.

965*. Дано: $\log_{10}3=a$; $\log_{10}2=b$.

Доказать, что $\log_5 6=\frac{a+b}{1-b}$.

966*. Дано: $\log_5 4=a$; $\log_5 3=b$.

Доказать, что $\log_{25}12=\frac{a+b}{2}$.

967*. Найти $\log_6 16$, зная, что $\log_{12}27=a$.

Решить уравнения:

968. 1) $4+\frac{2}{3^x-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$; 2) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$;

3) $x^{3-\lg\frac{x}{3}}=900$; 4) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$.

969. 1) $\lg(152+x^3)-3\lg(x+2)=0$;

2) $\log_7\log_2\log_{13}x=0$; 3) $\log_5\log_4\log_3 x=0$.

970. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^y=y^x,\\ x^p=y^q;\end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=648,\\ 3^x\cdot 2^y=432;\end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[y]{5^{x^2}}=25^y\sqrt[y]{125^x},\\ \sqrt[x]{64}\cdot\sqrt[y]{8}=\sqrt[y]{2^x};\end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2^x-2^y=768,\\ 2^{x-1}+2^{y-1}=640;\end{cases}$

5) $\begin{cases} \lg x+\lg y=\lg 11+\lg 9, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^{\lg y}=100, \\ xy=1000. \end{cases}$

971. 1) Три числа, сумма которых равна 217, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как 2-й, 9-й и 44-й члены арифметической прогрессии. Сколько членов этой арифметической прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 820?

2) Найти пятый член геометрической прогрессии, в которой второй член равен 16, а сумма трёх первых членов равна 56.

3) Найти

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-2}{x}.$$

972. 1) Первые члены арифметической и геометрической возрастающих прогрессий одинаковы, и каждый из них равен 3. Вторые члены прогрессий также равны между собой. Третий член геометрической прогрессии относится к третьему члену арифметической прогрессии, как 9 : 5. Найти обе прогрессии.

2) Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{15}{64}(3-\sqrt{3}),\ \frac{15}{64}(\sqrt{3}-1),\ \dots .$$

3) Построить график функции $y=-2^x$.

973. 1) Два тела одновременно двигаются навстречу друг другу из двух точек, отстоящих одна от другой на расстоянии 555 *см*. Через сколько секунд они встретятся, если первое тело проходит в первую секунду своего движения 30 *см*, а в каждую следующую секунду на 5 *см* больше, чем в предыдущую; второе же тело проходит в первую секунду 60 *см*, а в каждую следующую на 4 *см* меньше, чем в предыдущую?

2) Вычислить при помощи счётной линейки:

$$x=\frac{1{,}05 \cdot 42{,}4}{157}+2.$$

3) Решить уравнение:

$$6^{2x+4}=2^{x+8} \cdot 3^{3x}.$$

974. 1) Из метеорологических наблюдений температуры оказалось, что с 5 по 16 августа включительно термометр каждое утро показывал понижение температуры на $\frac{1}{2}$ градуса и что средняя утренняя температура за этот период была $17\frac{1}{4}$ градуса. Сколько градусов показывал термометр 5 августа?

2) Вычислить при помощи счётной линейки объём цилиндра, у которого диаметр основания равен 5 *см*, а высота 8,3 *см*.

3) Решить графически уравнение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{x}{2}.$$

975. 1) Три положительных числа составляют геометрическую прогрессию, произведение первого и третьего членов которой равно 36. Определить число членов арифметической прогрессии, первый член которой равен второму члену данной геометрической прогрессии, разность равна 4 и сумма всех членов равна 510.

2) Вычислить при помощи счётной линейки:

$$x = \sqrt{\frac{48{,}8 \cdot 0{,}00506}{12{,}6 \cdot 0{,}0304}}.$$

3) Построить график функции $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

976. 1) Четыре числа составляют арифметическую прогрессию; если к третьему числу прибавить 4, а к четвёртому числу 16, то полученные четыре числа составят геометрическую прогрессию. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию.

2) Вычислить при помощи таблиц логарифмов:

$$x = 5{,}387 \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{533{,}6}}{0{,}08157} - 9{,}318^2}.$$

3) Решить уравнение:

$$5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}.$$

977. 1) Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии, все члены которой положительные числа, равна 221. Третий член этой прогрессии больше первого на 136. Найти сумму шести членов данной прогрессии.

2) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 6, а сумма её четырёх первых членов равна $5\frac{5}{8}$. Найти первый член этой прогрессии.

3) Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$.

ГЛАВА XII.

ФУНКЦИИ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ. ПРОИЗВОДНАЯ.

§ 41. Элементарное исследование функций.

978. 1) Дано: $f(x)=3x+1$.

Найти: $f(2)$; $f(-3)$; $f\left(-\frac{2}{3}\right)$; $f(0)$.

2) Дано: $f(x)=2x+3$.

Найти: $f(x^2)$; $[f(x)]^2$; $f(x)-1$.

979. Известно, что величина y изменяется прямо пропорционально величине x. Составить формулу зависимости y от x, зная, что при x, равном 2,5, y равен 7,5.

980. Тело равномерно движется со скоростью 3 *м* в сек. Выразить зависимость пройденного телом пути s от времени движения t.

1) Построить график изменения пути s в зависимости от изменения времени t и доказать, что коэффициент 3 есть тангенс угла, образуемого графиком данной функции с положительным направлением оси абсцисс.

2) Найти величину этого угла измерением и по таблице тангенсов.

981. Показать, что график функции $y=kx$ можно построить посредством растяжения всех ординат графика функции $y=x$ в k раз, если $k>1$, или путём сжатия ординат в $\frac{1}{k}$ раз, если $0<k<1$.

982. Показать, что график функции $y=-x$ симметричен графику функции $y=x$ относительно оси OX.

983. Дана функция $y=kx$.

1) Какие значения может принимать аргумент x?

2) Какие значения может принимать функция y?

3) Доказать, что при $k>0$: а) функция y возрастает; б) при $x>0$ функция $y>0$, при $x<0$ функция $y<0$.

4) Доказать, что при $k<0$: а) функция y убывает; б) при $x>0$ функция $y<0$, при $x<0$ функция $y>0$.

Дать графическую иллюстрацию указанных свойств функции.

984. 1) Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью OX угол: 45°; 60°; 135°.

2) Известно, что прямая $y=kx$ проходит через точку $M(6, 3)$. Написать уравнение этой прямой.

985. Станок стоит 8000 руб., а годовая амортизация его 400 руб. Выразить стоимость станка (y) в зависимости от времени (x) и построить график полученной функции.

986. Дана функция $y=2x+1$.

1) Доказать, что величина y изменяется не прямо пропорционально величине x.

2) Показать, что график функции $y=2x+1$ можно построить при помощи параллельного переноса графика функции $y=2x$ в направлении оси ординат вверх на одну единицу.

3) Доказать, что отношение приращения функции (Δy) к соответствующему приращению аргумента (Δx) есть величина постоянная для данной функции.

4) Доказать, что функция $y=2x+1$ неограниченно возрастает с возрастанием аргумента.

5) Найти, при каких значениях аргумента x функция $y=2x+1$ положительна; отрицательна; равна 0.

987. Известно, что прямая $y=kx+b$ проходит через точки $A(-1; -4)$ и $B(0; 5)$. Написать уравнение этой прямой.

988. Пружина имеет длину l, равную 13 *см*. При нагрузке в q килограммов длина пружины изменяется следующим образом:

q в килограммах	0	5	10	15	20	25
l в сантиметрах	13	14,2	15,4	16,6	17,8	19,0

1) Построить график изменения длины пружины в зависимости от изменения нагрузки от 0 до 25 *кг*.

2) Составить формулу зависимости длины (l) пружины от нагрузки (q).

989. При испытании электровоза получена следующая таблица зависимости между током I в амперах и силой тяги F в килограммах:

I	65	86	106	116	137	150
F	160	360	560	660	850	980

1) Начертить график зависимости F от l.

2) Заменить этот график приближённо прямой линией.

3) Составить приближённую линейную формулу зависимости F от l.

990. В результате опыта получена следующая таблица зависимости между силой F, приложенной к верёвке блока, и весом поднимаемого груза P.

P в килограммах	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
F в килограммах	2,6	4,0	5,25	6,5	7,8	9,1	10,4	11,6	13	14,1

1) Построить график зависимости F от P.

2) Заменить этот график приближённо прямой линией.

3) Составить приближённую линейную формулу зависимости F от P.

991. Опытным путём получена следующая таблица для скорости звука v *м* в сек. в сухом воздухе при различных температурах $t°$:

t в градусах	-30	-17	-5	0	8	12	20	30
v *м* в сек.	313	321	329	332	337	339	344	346

1) Построить график зависимости v от t.

2) Заменить этот график приближённо прямой линией.

3) Составить приближённую линейную формулу зависимости v от t.

992. Даны уравнения (1 — 5):

1) $3x - y = 0$; 2) $x + 2y = 0$; 3) $5x + 2y = 10$;

4) $3x - 5y + 15 = 0$; 5) $4x = \frac{5y - 3x}{3}$.

В каждом из них:

а) Привести данное уравнение к виду $y = f(x)$.

б) Построить график полученной функции.

в) Исследовать, при каких значениях x функция y положительна; отрицательна; равна 0.

г) Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

д) Какие из указанных функций являются возрастающими и какие убывающими?

е) Какая из возрастающих функций возрастает быстрее, чем остальные, и какая медленнее остальных?

993. 1) Доказать, что функция $y = kx + b$ при $k > 0$ — возрастающая, а при $k < 0$ — убывающая.

Привести примеры, давая k и b числовые значения и вычерчивая соответствующие графики.

2) Доказать, что отношение приращения Δy функции $y = kx + b$ к приращению аргумента Δx есть величина постоянная, равная коэффициенту k.

3) Доказать, что коэффициент k равен тангенсу угла, образуемого графиком функции $y = kx + b$ с положительным направлением оси OX.

994. 1) Построить график функции[1]:

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

2) Построить график функции:

$$y = \begin{cases} 1 - x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 1 + x, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

995. Дана функция $y = 2x - 4$.

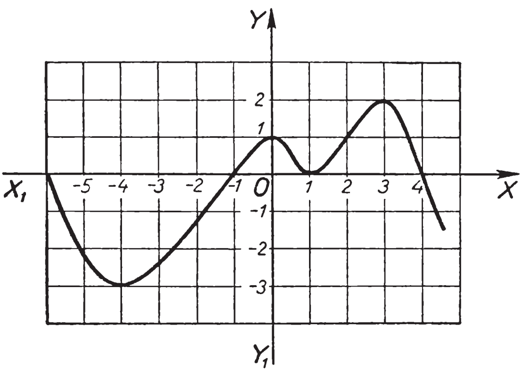
1) Построить график этой функции.

2) Составить уравнение в виде $y = f(x)$, определяющее функцию, обратную данной.

Указание. Чтобы составить уравнение, изображающее функцию, обратную функции $y = 2x - 4$, можно в данном уравнении заменить букву y буквой x, а букву x заменить буквой y и решить полученное уравнение относительно y.

3) Построить график обратной функции на том же чертеже и в том же масштабе.

4) Проверить, что полученные графики взаимно симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.



Черт. 40.

996. Дана функция $y = x + 2$.

1) Построить график, симметричный графику данной функции относительно прямой $y = x$.

2) Написать уравнение вновь полученной прямой и убедиться, что эта прямая является графиком функции, обратной данной.

3) Выполнить задания 1) и 2) для функции $y = x - 1$.

---

[1]) В разделе „Ответы“ на эту задачу и аналогичные ей даны графики для проверки правильности построения их учащимися.

997. На чертеже 40 изображён график функции $y=f(x)$.

1) Найти по графику промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

2) При каких значениях x функция $y=f(x)$ положительна; отрицательна; равна нулю?

3) Найти, при каких значениях x функция $y=f(x)$ имеет наибольшее (наименьшее) значение и какое именно.

998. 1) Площадь прямоугольника с основанием a сантиметров равна 24 *см*². Найти высоту прямоугольника h.

2) Вычислить h с точностью до 0,1 *см*, давая a следующие значения:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18	20	22	24
h	24																	

3) Как называется зависимость между a и h, выражаемая уравнением $h=\frac{24}{a}$?

4) Построить график изменения h в зависимости от изменения a.

5) Привести несколько примеров обратно пропорциональных величин.

999. Дана функция $y=\frac{6}{x}$.

1) Исследовать, при каких значениях аргумента x функция y принимает положительные значения; отрицательные значения.

2) Исследовать функцию при достаточно больших по абсолютной величине значениях аргумента (при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$).

3) Построить график функции.

4) Построить прямые $y=x$ и $y=-x$ и показать, что эти прямые являются осями симметрии гиперболы.

5) Найти точки пересечения прямой $y=x$ с гиперболой (вершины гиперболы), решая систему уравнений:

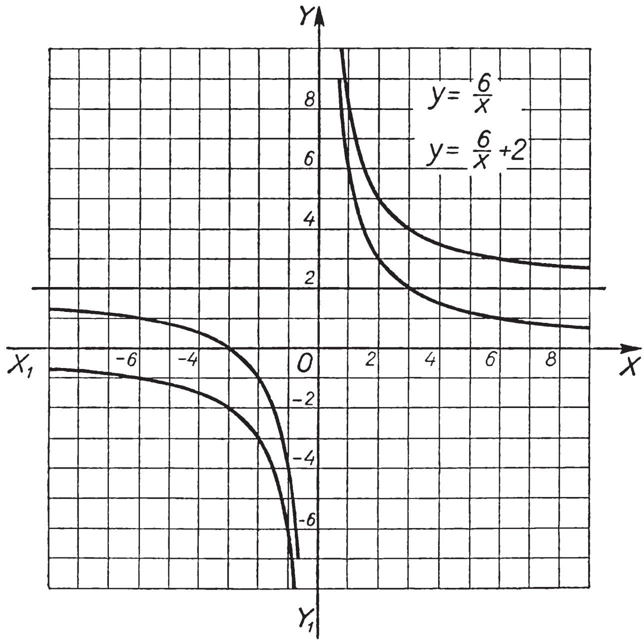
$$\begin{cases} y=\frac{6}{x}, \\ y=x. \end{cases}$$

1000. 1) Исследовать функцию $y=-\frac{6}{x}$, следуя указаниям, данным в предыдущей задаче.

2) Как изменяется положение гиперболы относительно осей координат в зависимости от знака коэффициента k в уравнении $y=\frac{k}{x}$?

1001. Гипербола $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $M(3, 5)$. Написать уравнение этой гиперболы, найти координаты её вершин и начертить график данной функции.

1002*. 1) Доказать, что график функции $y=\frac{6}{x}+2$ можно построить при помощи параллельного переноса графика функции $y=\frac{6}{x}$ в направлении оси ординат на две единицы вверх.



Черт. 41.

2) Построить на одном и том же чертеже (черт. 41) графики функций $y=\frac{6}{x}$ и $y=\frac{6}{x}+2$, вычислив координаты следующих точек:

x	-6	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	6
$y=\frac{6}{x}$										
$y=\frac{6}{x}+2$										

1003*. Дана функция $y=\frac{4x+9}{x}$.

1) Привести данное уравнение к виду: $y=\frac{k}{x}+b$.

2) Найти координаты вершин гиперболы и начертить (схематически) данную гиперболу.

3) Следуя данным указаниям, построить график функции:

$$y=\frac{4-2x}{x}.$$

1004. 1) Исследовать функцию $y=\frac{1}{x-1}$ и построить её график.

2) Показать, что график функции $y=\frac{1}{x-1}$ можно построить при помощи параллельного переноса графика $y=\frac{1}{x}$ в направлении оси абсцисс вправо на расстояние, равное 1.

1005. Написать формулы, выражающие следующие зависимости:

1) площадь квадрата Q в зависимости от его стороны a;

2) площадь круга S в зависимости от его радиуса R;

3) путь s, пройденный телом при свободном его падении под действием силы тяжести g за t секунд;

4) написать общую формулу, выражающую изменение функции y прямо пропорционально квадрату аргумента x;

5) привести примеры величин, зависимость между которыми выражается формулой $y=ax^2$.

1006. Дана функция $y=x^2$.

1) Доказать, что при любых значениях аргумента функция y неотрицательна ($y\geqslant 0$).

2) Доказать, что в промежутке $(-\infty;\ 0)$ функция убывает, в промежутке $(0;\ +\infty)$ возрастает.

3) Доказать, что при $x=0$ функция $y=x^2$ имеет наименьшее значение (минимум), равное 0.

4) Начертить график функции, уточняя форму графика построением нескольких его точек.

5) Доказать, что функция $y=x^2$ есть функция чётная и что её график имеет ось симметрии, совпадающую с осью ординат.

1007. 1) Исследовать функцию $y=-x^2$, внося соответствующие изменения в указания, данные в предыдущей задаче.

2) Показать, что график функции $y=-x^2$ является параболой, симметричной параболе $y=x^2$ относительно оси OX.

1008. Показать, что график функции $y=ax^2$ образуется посредством растяжения всех ординат графика функции $y=x^2$ в a раз, если $a>1$, или путём сжатия ординат в a раз, если $0<a<1$.

1009. Показать, что график функции $y=ax^2+c$ можно построить при помощи параллельного переноса графика функции $y=ax^2$ в направлении оси ординат на c единиц вверх при $c>0$ или на c единиц вниз при $c<0$.

1010. Показать, что график функции $y=(x-m)^2$ образуется посредством переноса всех точек графика $y=x^2$ параллельно оси абсцисс на m единиц вправо при $m>0$ и на m единиц влево при $m<0$.

1011. Парабола $y=x^2$ перенесена параллельно оси OX на 3 единицы вправо и параллельно оси OY на 2 единицы вниз. Написать новое уравнение параболы.

1012. Указать, каким перемещением параболы $y=x^2$ получен график каждого из следующих уравнений:

1) $y=(x+4)^2+3$; 2) $y=(x-2)^2-5$;

3) $y=(x-3)^2+2$; 4) $y=(x+6)^2-3$.

1013. Дана функция $y=x^2-4x-5$.

1) Привести квадратный трёхчлен к виду $y=(x+m)^2+c$ и выяснить, что графиком функции является парабола.

2) Найти координаты вершины этой параболы.

3) Найти точки пересечения параболы с осью OX.

4) Построить ещё несколько точек, уточняющих форму параболы.

5) Построить график функции $y=x^2-4x-5$ и при помощи графика:

а) найти, при каких значениях x функция y принимает положительные значения; отрицательные значения; обращается в нуль;

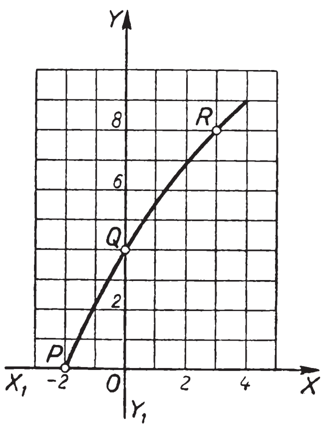
б) установить промежутки убывания и возрастания функции;

в) найти, при каком значении x функция имеет наименьшее значение и какое именно.

1014. Дана функция $y=2x^2+4x-6$. Построить график этой функции и исследовать её, следуя указаниям, данным в предыдущей задаче.

1015. Построить график функции

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant 0, \\ x, & \text{если } x\geqslant 0. \end{cases}$$



Черт. 42.

1016*. На чертеже 42 изображена кривая, заданная в промежутке $(-2; 4)$. Составить уравнение параболы $y=ax^2+bx+c$, три точки которой: $P(-2; 0)$, $Q(0; 4)$ и $R(3; 8)$, совпали бы с тремя точками данной кривой.

1017. 1) Исследовать степенную функцию $y=x^n$ при $n=1$; $n=2$; $n=3$; $n=4$ и $n=5$.

Построить графики каждой из функций при одних и тех же осях координат и в одинаковом масштабе.

2) Исследовать степенную функцию $y=x^n$ при $n=-1$; $n=-2$; $n=-3$; $n=\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{3}$. Построить график каждой из функций.

Исследовать следующие функции и построить их графики:

1018. 1) $y=\frac{1}{1+x^2}$;

2) $y=x^4-4x^2+5$.

1019. 1) $y=2^x-4$; 2) $y=2^{x-1}$;

3) $y=2^{\frac{1}{2}x^2}$; 4) $y=2^{|x|}$.

1020. 1) $y=\log_2(-x)$; 2) $y=\log_2(x+1)$;

3) $y=\log_2 x^2$; 4) $y=a^{\log_a x}$.

1021. Решить графически следующие уравнения:

1) $2^x=4x$; 2) $2^{-x}=x$;

3) $7\log_2 x-6x+10=0$; 4) $4^x=\frac{12}{x}$;

5) $\lg x=0{,}1x$; 6) $\cos x-x=0$;

7) $\sin x-x=0$; 8) $\sin x=4-x$;

9) $2^x=x+2$; 10) $2x^3=6x^2-1$.

§ 42. Предел функции.

Вычислить пределы следующих функций:

1022. (Устно.) 1) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-2)$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+1)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3x^2-2)$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^4-3x^3+5x-1)$.

1023. (Устно.) 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+2}{x^2-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x+1}$.

1024. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^2-8x-1}$.

1025. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x \to 2}\left(3x^2 - 2x + \frac{4}{x}\right) = 10$; 2) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 3} = 3$;

3) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - x + 1} = 6$; 4) $\lim\limits_{x \to -3}\left[2(x+1) - \frac{x}{x-1}\right] = -4\frac{3}{4}$.

1026. Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{x}{5}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{2}{x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1}{x}$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x$; 5) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1027. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{5x + 1}{x} = 5$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{x + 3}{2x} = \frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x + 2}{x} + 1\right) = 2$.

1028. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} + 3\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{4}{x^2 + x}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x + 1}{x} + 2\right)$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{2x}{x - 1} - 1\right)$.

1029. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x - 2}{x^2 + x} = \infty$; 2) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x + 1}{x - 1} = \infty$;

3) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1 + x + x^2}{x^3 + 3x^2 + x} = \infty$; 4) $\lim\limits_{x \to 3}\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9} = \infty$.

1030. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x + 2}{x^2 - 4}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1}$;

3) $\lim\limits_{x \to 2a}\frac{4a^2 - x^2}{x - 2a}$; 4) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

1031. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{3x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 7x - 5} = \frac{3}{4}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = -1$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{5x^2 - 4x + 3}{x^4 + 1} = 0$; 4) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{1 - x}{3 - 3x^2} = \frac{1}{6}$.

1032. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

1033. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} = \frac{\sqrt{a}}{2a}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x} = \frac{\sqrt{a}}{a}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{2}{3}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{3}$.

1034. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$.

1035. Доказать равенства:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

§ 43. Производная.

а) Понятие о производной.

1036. По прошествии 5 сек. тело находилось на расстоянии 12 *м* от начального положения, а по прошествии 9 сек. (от начала движения) — на расстоянии 30 *м*. Найти среднюю скорость тела за промежуток времени, протекший между этими двумя моментами.

1037. Известно, что путь, пройденный свободно падающим телом, вычисляется по формуле $s=\frac{gt^2}{2}$, где s — путь в метрах, g — ускорение силы тяжести, равное 9,8 *м* в сек^2, t — время в секундах.

1) Найти среднюю скорость тела за промежуток времени от $t_1=2$ до $t_2=5$.

2) Найти среднюю скорость тела за следующие промежутки времени, заполняя пустые места таблицы:

Начальное значение аргумента t	Новое значение аргумента	Приращение аргумента Δt	Начальное значение функции s	Новое значение функции	Приращение функции Δs	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
2	4	2	19,6	78,4	58,8	29,4
2	3,0					
2	2,8					
2	2,6					
2	2,4					
2	2,2					
2	2,1					
...	...					
2	2,01					

3) Найти скорость v тела в момент $t=2$, вычисляя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

4) Доказать, что скорость v свободно падающего тела в любой момент времени t вычисляется по формуле $v=gt$.

1038. Путь s, пройденный падающим телом при начальной скорости v_0, определяется формулой: $s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$.

1) Вывести формулу, выражающую скорость тела для любого момента времени.

2) Вычислить скорость тела в момент $t=5$, если $v_0=5$ *м в сек*.

1039. Точка движется так, что путь s в метрах, пройденный ею за промежуток времени t в секундах, выражается формулой: $s=4t^2+3t$.

1) Найти скорость точки в любой момент времени.

2) Вычислить скорость точки в момент $t=3$.

1040. При нагревании тела температура его T изменяется в зависимости от времени нагревания t по закону $T=0{,}4t^2$, где T — температура в градусах C, t — время в секундах.

1) Найти среднюю скорость изменения температуры тела за промежуток времени от $t_1=4$ до $t_2=6$.

2) Найти скорость изменения температуры тела в момент $t=4$.

1041. Ток I ампер изменяется в зависимости от времени по закону $I=0{,}2t^2$, где t — число секунд.

Найти скорость изменения тока в конце четвёртой секунды.

1042. Точка движется по прямой линии со скоростью $v=2t+1$, где v — скорость в метрах в секунду, t — время в секундах.

1) Найти среднее ускорение за промежуток времени от $t_1=3$ до $t_2=8$.

2) Найти ускорение в момент $t=3$.

3) Вывести формулу ускорения в любой момент времени.

1043. Дано уравнение движения точки: $s=t^3+4$, где s — путь в метрах, t — время в секундах.

1) Найти скорость движения точки в любой момент времени.

2) Найти ускорение движения точки в любой момент времени.

1044. Опытным путём установлено, что количество P граммов вещества, уже растворившегося в воде за t секунд, есть некоторая функция переменного t, т. е. $P=f(t)$.

1) Найти среднюю скорость (v_{cp}) растворения данного вещества в воде за промежуток времени от t_1 до t_2.

2) Найти скорость v растворения в воде данного вещества в любой момент времени t.

1045. При некоторой химической реакции за t секунд образуется Q граммов вещества.

1) Как найти среднюю скорость (v_{cp}) данной химической реакции за промежуток времени от t_1 до t_2, считая $Q=f(t)$?

2) Как найти скорость (v) химической реакции в любой момент времени t?

1046. Найти производные следующих функций:

1) $y=3x^2$; 2) $y=5-4x^2$;

3) $y=ax+b$; 4) $z=5t^2-4t^3$;

5) $y=\frac{3x^2}{2}$; 6) $y=\frac{2}{3}x^3-x$; 7) $y=3x^2+5x-6$.

б) Геометрический смысл производной.

1047. Построить график функции $y=\frac{1}{2}x^2$ и отметить на полученной кривой точки M и N, абсциссы которых соответственно равны 2; 4.

1) Доказать, что тангенс угла, образуемого секущей MN с положительным направлением оси OX, равен 3. Пояснить доказательство на чертеже.

2) Доказать, что тангенс угла, образуемого касательной к кривой в точке M с положительным направлением оси OX, равен 2. Пояснить доказательство на чертеже.

1048. 1) Построить график функции $y=\frac{1}{4}x^2+1$ и найти тангенс угла, образуемого касательной к кривой в точке, абсцисса которой равна 2.

2) На чертеже провести искомую касательную „на глаз“, измерить угол, образуемый ею с осью OX, по таблицам найти тангенс этого угла и сопоставить полученный результат с вычисленным.

1049. Построить график функции $y=x^2-4x$ и найти подъём полученной кривой в точке: 1) с абсциссой 2; 2) с абсциссой 3.

Указание. Подъёмом кривой в точке M относительно оси OX называется угловой коэффициент касательной, проведённой к данной кривой в точке M.

в) Дифференцирование по формулам.

1050. Найти производные следующих функций, пользуясь формулами дифференцирования:

1) $y=5$; 2) $y=x^4$; 3) $y=3x^5$; 4) $y=-2ax^3$;
5) $y=4x^3+5x^2-3x$; 6) $y=x^4-2x^3+3x^2-5$;
7) $y=\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2-1$; 8) $y=3x^2(2x-5)$.

1051. 1) Дано: $s=2t^3-4t^2+t+1$. Найти: $\frac{ds}{dt}$.

2) Дано: $f(r)=\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{4}r^2-r-2$. Найти: $f'(r)$.

3) Дано: $f(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2$. Найти $f'(2)$.

4) Дано: $f(t)=t^2(2t-1)$. Найти $f'(1)$.

1052. Опытным путём установлено, что количество жидкости Q граммов, вытекающее через отверстие в сосуде за t секунд, определяется формулой: $Q=120t+t^2-\frac{1}{3}t^3$.

1) Найти „расход жидкости“ в момент времени $t=10$ сек.
2) Через сколько секунд „расход жидкости“ прекратится и какое количество жидкости выльется за это время из сосуда?

Примечание. „Расходом жидкости“ называется количество жидкости, вытекающее в единицу времени.

1053. Тело вращается вокруг оси, причем изменение угла φ в зависимости от времени t вращения выражается формулой:

$$\varphi=0{,}1t^2+0{,}5t-0{,}1.$$

Найти угловую скорость вращения тела в момент времени $t=10$ сек.

1054. Уравнение движения точки:

$$s=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t+1,$$

где s — путь в метрах, t — время в секундах. Найти скорость и ускорение точки в момент времени $t=3$ сек.

1055. 1) Скорость точки, движущейся прямолинейно, определяется формулой: $v=3t+2t^2$, где t — время в секундах, v — скорость в сантиметрах в секунду. Какое ускорение будет иметь точка в момент времени $t=4$ сек.?

2) Поезд выходит со станции и через t часов находится на расстоянии $s=t^3+2t^2+3t$ километров от станции отправления. Найти величину его ускорения в конце t часов и в конце второго часа.

1056. Расстояние s метров, пройденное пароходом за t секунд после отхода, может быть вычислено (для не очень больших значений t) по формуле:

$$65s=\frac{1}{8}t^3+3t^2+t.$$

Найти скорость v и ускорение a при $t=10$ сек.

1057. 1) Тело движется прямолинейно, причём изменение пройденного пути s в метрах в зависимости от времени движения t в секундах выражается уравнением:

$$s=200+40t-t^2.$$

Найти скорость тела в момент $t=5$ сек. В какой момент времени t тело остановится?

2) В момент t часов поезд находится на расстоянии $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$ километров от точки отправления. Найти скорость и ускорение поезда. В какой момент поезд остановится и изменит направление?

1058. Известно, что сила F в динах, вызывающая движение материальной точки массой m граммов, связана с ускорением $a\frac{см}{сек^2}$ соотношением: $F=ma$.

Материальная точка массы 50 *г* движется прямолинейно по закону $s=1+3t+5t^2$, где s — путь точки в сантиметрах, t — время движения в секундах. Найти действующую на точку силу.

1059. Из одного и того же пункта A одновременно начали двигаться два тела. Движение первого тела определялось уравнением

$$s_1=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t,$$

а движение второго тела — уравнением

$$s_2=\frac{1}{3}t^3+4t-1,$$

где t — время движения в секундах, а s_1 и s_2 — путь каждого тела в метрах. Найти ускорение каждого из тел в тот момент, когда их скорости равны.

1060. В следующих примерах использовать правило для нахождения производной произведения: $(uv)'=u'v+v'u$.

1) $y=(x^2-3x)(1-2x)$; 2) $y=(x^2-6x+3)(2x-1)$;

3) $y=(1+2x-4x^2)(3x+1)$; 4) $y=(x^2+4x-3)(3x^2+12x+12)$.

Найти производные от следующих функций:

1061. 1) $y=1-\sin x$; 2) $y=x-\cos x$;
3*) $y=\operatorname{tg} x-2x$; 4*) $y=x-\operatorname{ctg} x$;
5) $y=2(1-\cos x)$; 6) $y=x^2\sin x$;
7) $y=\sin x\cdot\cos x$; 8) $y=(1+\cos x)\sin x$.

1062. 1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\frac{1}{2}\cos 2t$;
3) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$; 4) $y=\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos x$;
5) $y=\sin\frac{x}{2}\sin 2x$.

1063*. 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\cos^2 x$;
3) $y=\sin^2 2x$; 4) $y=5\cos^2 x-\frac{\cos x+1}{2}$.

1064. 1) Найти угловой коэффициент касательной к синусоиде $y=\sin x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{4}$.

2) Доказать, что касательная к синусоиде $y=\sin x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{2}$ параллельна оси OX.

г) Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум функций.

1065. Показать, что функция $y=x^2+1$ возрастает в промежутке $(0;+\infty)$ и убывает в промежутке $(-\infty;\ 0)$. Пояснить результат на чертеже.

1066. Показать, что функция $y=2x^3$ возрастает в любом промежутке.

1067. 1) Дана функция $y=3x^2$. Узнать, будет ли она возрастать или убывать при значении аргумента:

а) $x=1$; б) $x=-1$.

2) Узнать, будет ли функция $y=-x^2+x-1$ возрастать или убывать при значении аргумента:

а) $x=-2$; б) $x=0$; в) $x=2$.

3) Доказать, что функция $y=\sin x+\cos x$ возрастает при значении аргумента $x=0$ и убывает при $x=\frac{\pi}{3}$.

1068. Показать, что функция $y=\frac{1}{12}x^3-x+3$ возрастает в промежутке $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$ и убывает в промежутке $(-2;\ 2)$.

1069. В каких промежутках возрастают и в каких убывают следующие функции:

1) $y=x^3-12x^2+48x-13$; 2) $y=x^3-x^2-8x+2$;
3) $y=x^3-3x^2+5$; 4) $y=2x^3-9x^2+12x-3$.

1070. В каких промежутках возрастают и в каких убывают следующие функции:

1) $y = \sin x$, если x изменяется от 0 до 2π; 2*) $y = \sin^2 x$.

1071. Исследовать на максимум и минимум следующие функции:

$$1)\ y = 3x^2 - 4x + 6;\quad 2)\ y = 5 + 3x - x^2;$$

$$3)\ y = x^3 + 5x + 2;\quad 4)\ y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 10.$$

1072. В следующих примерах найти координаты вершин парабол, точки пересечения их с осями координат и начертить „на глаз" данные параболы:

$$1)\ y = 3x^2 - 6x + 5;\qquad 2)\ y = 2 + x - x^2;$$
$$3)\ y = x^2 - 2x - 3;\qquad 4)\ y = x^2 + 4x + 5.$$

1073. Исследовать на максимум и минимум следующие функции:

$$1)\ y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4};\quad 2)\ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6;$$

$$3)\ y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1;\quad 4)\ y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10.$$

1074. Разделить число 70 на такие две части, чтобы их произведение было наибольшим.

1075. Имеется 480 *м* проволоки. Этой проволокой требуется огородить в 3 ряда прямоугольный участок земли так, чтобы площадь участка была наибольшей. Найти длину и ширину такого участка.

1076. Из листа железа, имеющего форму квадрата со стороной 60 *см*, требуется вырезать по углам 4 квадрата так, чтобы из оставшейся части после сгибания получить коробку наибольшей ёмкости. Найти длину стороны вырезаемых квадратов.

1077. Известно, что прочность балки с прямоугольным сечением изменяется прямо пропорционально ширине и квадрату высоты сечения. Найти размеры сечения балки наибольшей прочности, которую можно выпилить из круглого бревна, имеющего наименьший диаметр в d сантиметров.

1078. В следующих примерах исследовать изменение данных функций в указанных промежутках, определив интервалы возрастания и убывания функций, точки максимума и минимума:

1) $y = 2x - x^2$ в промежутке $(-1;\ 3)$;

2) $y = \sin 2x$ в промежутке $(0;\ \pi)$;

3) $y = \cos 2x + x$ в промежутке $(0;\ \pi)$;

4) $y = \sin 2x + 2x$ в промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

1079. Построить графики следующих функций, определив предварительно: промежутки возрастания и убывания; точки максимума и минимума; точки пересечения кривой с осями координат; несколько других точек кривой, уточняющих её форму:

1) $y=\frac{1}{2}x^2$; 2) $y=-\frac{3}{4}x^2+5$;

3) $y=x^2-4x$; 4) $y=x^2-2x+1$;

5) $y=x^2-x-2$; 6) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$;

7) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{5}{3}$; 8) $y=2x^2-5x+7$.

1080. Исследовать следующие функции и построить график каждой из них, выяснив: промежутки возрастания и убывания; точки максимума и минимума; точки пересечения графика с осями координат; несколько других точек кривой, уточняющих её форму:

1) $y=x^3-3x$; 2) $y=x^2-x^3$;

3) $y=\frac{1}{4}x^4-8x$; 4) $y=x^4-4x^2$.

1081. Построить графики следующих функций, используя указания, данные в предыдущей задаче:

1) $y=x^3-3x^2+2$; 2) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$;

3) $y=\frac{1}{10}\left(x^4-13x^2+36\right)$; 4) $y=2x^2-x^4-1$.

1082. Требуется огородить проволочной сеткой длиной 200 *м* участок земли в форме прямоугольника, примыкающего к стене дома. Найти размеры прямоугольника, при которых площадь участка будет наибольшей.

1083. Внутренняя поверхность бака с квадратным основанием без крышки равна 108 *дм*^{2}. Каковы должны быть размеры бака, чтобы его объём был наибольшим?

1084. Из прямоугольного листа жести 3 *дм* $\times$ 5 *дм* нужно изготовить коробку (без крышки), вырезая по углам равные квадраты и загибая края листа. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объём коробки был наибольшим?

1085. Из прямоугольного листа с размерами a и b требуется изготовить коробку наибольшей вместимости, вырезав по углам четыре равных квадрата и загнув получившиеся выступы. Найти величину стороны вырезаемых квадратов.

Рассмотреть случай: $a=b$.

1086*. Требуется изготовить открытую жестяную банку вместимостью в 2 *л*. При каких размерах банки на её изготовление пойдёт возможно меньшее количество жести?

1087*. Требуется изготовить сосуд без крышки в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, ёмкостью 32 *л*. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы на его изготовление пошло возможно меньше материала?

1088*. Требуется изготовить ящик без крышки в форме прямоугольного параллелепипеда объёмом в 36 *дм*^{3}; стороны основания ящика должны относиться, как 1 : 2. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы на него пошло наименьшее количество материала?

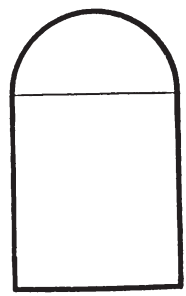
1089*. Требуется изготовить из жести закрытый сверху и снизу цилиндрический бак вместимостью в 60 *л*. При каких размерах бака на его изготовление пойдёт возможно меньше материала?

1090*. Требуется сделать цилиндрический сосуд данной ёмкости, закрытый сверху и снизу. Показать, что на него потребуется наименьшее количество материала, если высота сосуда будет равна диаметру его основания.

1091*. Требуется изготовить цилиндрическую кружку, открытую сверху, заданного объёма v, так, чтобы при этом ушло минимум материала. Каковы должны быть размеры кружки?

1092*. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s = 6t^2 - t^3$, где s дано в метрах и t в секундах. При каком t скорость движения будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

1093*. Окно имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом (черт. 43), периметр фигуры окна равен 6 *м*. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало максимум света?



Черт. 43.

1094. Поперечное сечение туннеля имеет форму прямоугольника высотой h, к верхней горизонтальной стороне которого примыкает полукруг радиуса r. Периметр этого сечения $2p$ дан. При каком соотношении r и h площадь сечения при данном p будет наибольшая.

Указание. За независимую переменную принять r.

1095*. Из всех прямоугольников данной площади найти такой, у которого периметр наименьший.

1096. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 *см*. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольший?

1097. Из листа жести шириной a требуется согнуть открытый жёлоб так, чтобы поперечный разрез его имел форму трапеции, у которой $AB = BC = CD = \frac{1}{3}a$. Какое значение надо придать углу φ, чтобы вместимость жёлоба была наибольшей?

1098. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник так, что одна сторона его лежит на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника. Доказать, что наибольшая площадь прямоугольника равна $\frac{ah}{4}$.

ГЛАВА XIII.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

§ 44. Понятие о мнимом числе.

1099. Если a и b — натуральные числа, то в множестве каких чисел всегда разрешимо каждое из следующих уравнений:

1) $\frac{x}{a}=b$; 2) $ax=b$; 3) $x+a=b$;

4) $x-a=b$; 5) $ax^2=b$.

Привести числовые примеры.

1100. Если a и b — любые рациональные числа, то всегда ли разрешимо в множестве действительных чисел уравнение $ax^2=b$? Привести числовые примеры.

1101. Показать, что квадратное уравнение $x^2-8x+25=0$ не имеет решения в множестве действительных чисел.

1102. Если ввести новое число, обозначаемое буквой i при условии, что $i^2=-1$, то действие извлечения квадратного корня из отрицательного числа станет выполнимым. Проверить правильность равенств:

$$1)\ \sqrt{-4}=\pm 2i;\quad 2)\ \sqrt{-\frac{9}{16}}=\pm\frac{3}{4}i.$$

1103. Единичный вектор OA подвергнут двум операциям: 1) операции растяжения в 3 раза и 2) операции поворота на угол, равный $180°$. Построить на числовой оси данный вектор и вновь полученный вектор и написать соответствующее ему число.

1104. 1) Пояснить, в результате каких операций над единичным вектором получены векторы, соответствующие следующим числам:

$$-1;\quad \frac{1}{2};\quad -5;\quad \frac{3}{4};\quad 0{,}6;\quad -1{,}5;\quad 2.$$

2) Дать геометрическое изображение указанных чисел.

3) Назвать модуль и аргумент каждого из данных чисел.

1105. Единичный вектор OA подвергнут растяжению в 2 раза и повёрнут на угол в 90°. Построить в координатной плоскости данный вектор и вектор, вновь полученный, и написать соответствующее ему число.

1106. 1) Построить в координатной плоскости векторы, соответствующие следующим мнимым числам:

$$3i; \quad -i; \quad \frac{1}{2}i; \quad -2i; \quad -0{,}5i; \quad -i\sqrt{2}.$$

2) Найти модуль и аргумент каждого из данных чисел.

1107. 1) Единичный вектор OA подвергнут растяжению в 3 раза и повёрнут на угол в 30°. Построить в координатной плоскости данный вектор OA и вновь полученный вектор.

2) Найти модуль и аргумент мнимого числа, соответствующего полученному вектору.

1108. В следующей таблице даны модули и аргументы комплексных чисел. Построить в координатной плоскости векторы, соответствующие этим числам.

№ п/п	Модуль комплексного числа	Аргумент комплексного числа	№ п/п	Модуль комплексного числа	Аргумент комплексного числа
1	2	180°	5	2,5	60°
2	3	45°	6	1,5	120°
3	$\frac{1}{2}$	90°	7	4	225°
4	1	— 90°	8	0,75	— 30°

§ 45. Сложение и вычитание комплексных чисел.

1109. Построить геометрическое изображение следующих чисел и выполнить их сложение:

1) $2+3$; 2) $-4+1$;
3) $-3+(-4)$; 4) $2+(-5)+4$.

1110. Распространяя правило сложения векторов, изображающих действительные числа, на сложение векторов, изображающих мнимые числа, построить суммы следующих чисел:

1) $5i+2i$; 2) $-3i+i$; 3) $-2i+(-3i)$;
4) $i+(-5i)+2i$; 5) $-0{,}5i+(-2{,}5i)+(-i)$.

1111. Построить следующие суммы и показать, что для мнимых чисел справедливы равенства:

1) $3i+2i=2i+3i$ (переместительный закон сложения);

2) $(2i+3i)+4i=2i+(3i+4i)$ (сочетательный закон сложения).

1112. Применяя правило сложения векторов, показать, что сумма действительного числа 2 и мнимого числа $3i$ образует комплексное число $2+3i$, изображающее вектор, представляющий сумму слагаемых векторов.

1113. Построить векторы, изображающие следующие комплексные числа:

1) $5+4i$; 2) $-3+i$; 3) $4-2i$; 4) $-1-i$.

1114. Построить суммы следующих чисел:

1) $(2+3i)+(1+4i)$; 2) $(2+5i)+(-3+i)$.

Выполнить сложение (по возможности устно):

1115. 1) $(5+4i)+(3-7i)$; 2) $(2-8i)+(5-i)$;
3) $(2+5i)+(-2-2i)$; 4) $(4+3i)+(-4+3i)$.

1116. 1) $(2-4i)+(-2+4i)$;
2) $(1+i)+(2+i)+(3+i)$;
3) $(0,5-3,2i)+(1,5-0,8i)+(-4-i)$;
4) $2+(3+4i)+2i+(-6-7i)$.

1117. 1) $\left(1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i\right)+\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}i\right)+\left(-\frac{3}{4}-2i\right)$;
2) $(0,12-1,4i)+(1,08+0,4i)+(2,5-0,2i)$;
3) $(a+bi)+(c+di)$; 4) $(3x-4yi)+(-x+2yi)$.

1118. Построить и вычислить разность чисел:

1) $(5+3i)-(2+i)$; 2) $(-2+4i)-(2+i)$;
3) $(1+i)-(5+3i)$; 4) $(2-3i)-(2+3i)$.

Выполнить действия:

1119. 1) $(5+4i)-(2-3i)$; 2) $(2+i)+(3-6i)-(1-i)$;
3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i\right)$;
4) $(0,8-0,2i)+(0,1-1,3i)-(1,5+0,7i)-(2,3-0,6i)$.

1120. 1) $(2a-3bi)+(-a-bi)+(4a+2bi)-(2a-5bi)$;
2) $(5x-3yi)+(-2x+8yi)-[(2x-yi)-(7x-2yi)]$;
3) $(2c-8di)-[(5c-2di)+(c-di)-(-4c+3di)]$;
4) $(m-ni)+(3m-2ni)-[(-m-ni)-(5m+10ni)]$.

§ 46. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел.

1121. 1) Показать на чертеже, что умножению числа 2 на 3 соответствует растяжение вектора, изображающего множимое 2, в 3 раза без изменения его направления.

2) Показать на чертеже, что умножению числа 2 на (-3) соответствует растяжение вектора, изображающего множимое 2, в 3 раза и поворот его на 180°.

1122. 1) Распространив правило умножения действительных чисел на мнимые числа, показать, что умножению числа 2 на $3i$ соответствует растяжение вектора, изображающего множимое 2, в 3 раза и поворот его на 90°.

2) Пояснить на чертеже умножение следующих чисел:

$$(-2)\cdot 5i;\quad 4\cdot(-2i);\quad (-1)\cdot(-3{,}5i);\quad i\cdot i;\quad 2i\cdot 4i;$$
$$(-6i)\cdot(-0{,}5i);\quad 4i\cdot(-i).$$

1123. Построить произведения следующих чисел:

$$1)\ (2+i)\cdot 3;\qquad 2)\ (2+i)\cdot(-3);$$
$$3)\ (-4-i)\cdot 2i;\qquad 4)\ (-1+i)\cdot(-3i).$$

1124. Даны два мнимых числа:

$$\alpha=(2+i) \text{ и } \beta=3+4i.$$

1) Построить в координатной плоскости векторы, изображающие эти числа.

2) Построить вектор, изображающий произведение $\alpha\beta$, путём растяжения вектора α в отношении $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ и поворота его на угол, равный аргументу β.

3) Вычислить произведение $\alpha\beta$ по правилу умножения комплексных чисел и показать, что длина вектора, изображающего число $\alpha\beta$, равна произведению длин вектора α и β, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

Выполнить умножение (по возможности устно):

1125. 1) $2i\cdot 3i$; 2) $4i\cdot 2i\sqrt{2}$; 3) $5i\cdot(-4i)$;
4) $2{,}5i\cdot 4i$; 5) $-ai\cdot 5i$; 6) $mi\cdot ni$.

1126. 1) $(3+5i)\cdot 2$; 2) $(1-i)(-4)$; 3) $(-2-3i)\cdot 5$;
4) $(-3+4i)\cdot 2i$; 5) $(-8-7i)(-3i)$.

1127. 1) $(2-3i)(4-i)$; 2) $(1-2i)(5-i)$;
3) $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$; 4) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$;
5) $(5+i)(5-i)$; 6) $(1-i)(1-i)$.

1128. 1) $(3+2i)(3-2i)$; 2) $(5+i\sqrt{3})(5-i\sqrt{3})$;
3) $(c+di)(c-di)$; 4) $(m-ni)(m+ni)$;
5) $(\sqrt{k}+i\sqrt{n})(\sqrt{k}-i\sqrt{n})$.

Представить в виде произведения двух комплексных сопряжённых чисел:

1129. 1) a^2+b^2; 2) a^2+4b^2; 3) $4m^2+9n^2$;
4) a^2+4; 5) c^2+1; 6) $16+25$.

1130. 1) $a+b$; 2) $a+2$; 3) $a+1$;
4) $4+3$; 5) $5+9$; 6) $2+3$.

Выполнить деление комплексных чисел в алгебраической форме:

1131. 1) $4i:2$; 2) $8i:4$; 3) $6i:2i$; 4) $10i:5i$.

1132. 1) $2i:(-3i)$; 2) $7i:(-0{,}5i)$; 3) $\frac{2+i}{i}$; 4) $\frac{1+i}{i}$.

1133. 1) $\frac{3}{5i}$; 2) $\frac{4}{3i}$; 3) $\frac{5}{1+2i}$; 4) $\frac{4}{1-2i}$.

1134. 1) $\frac{2i}{1-i}$; 2) $\frac{5i}{2-3i}$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$; 4) $\frac{1-i}{1+i}$.

1135. 1) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; 2) $\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$; 3) $\frac{5+2i}{1-2i}$; 4) $\frac{7-3i}{1+3i}$.

1136. 1) $\frac{\sqrt{6}-i}{\sqrt{6}-2i}$; 2) $\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$; 3) $\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2i\sqrt{3}}$; 4) $\frac{m}{i\sqrt{m}}$.

1137. 1) $\frac{a}{a+bi}$; 2) $\frac{\sqrt{a}}{a+2i\sqrt{a}}$; 3) $\frac{a+i\sqrt{n}}{a-i\sqrt{n}}$; 4) $\frac{a-bi}{b+ai}$.

Выполнить действия:

1138. (Устно.) 1) i^6; 2) i^{15}; 3) i^{36}; 4) $(-i)^3$.

1139. (Устно.) 1) $(-i)^{10}$; 2) $(-i)^{21}$; 3) $-i^3$; 4) $-i^{19}$.

1140. 1) $(1+i)^2$; 2) $(1-i)^2$; 3) $(3+2i)^2$; 4) $(5-2i)^2$.

1141. 1) $(1+2ai)^2$; 2) $(2+bi)^2$; 3) $(a+5bi)^2$; 4) $(c-2di)^2$.

1142. 1) $(1+i)^3$; 2) $(1-i)^3$; 3) $(2+i\sqrt{3})^3$; 4) $(3-i\sqrt{3})^3$.

1143. 1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$;
4) $(1+i)^4$; 5) $(1-i)^4$.

1144. 1) Написать два мнимых числа, обладающих тем свойством, что: а) их сумма, б) их произведение, в) их сумма и произведение — вещественные числа.

2) Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы произведение двух мнимых чисел $a+bi$ и $c+di$ было: а) вещественным числом, б) чисто мнимым числом.

§ 47. Упражнения на все действия с комплексными числами.

1145. Доказать тождества:

1) $(1+i)^2+(1-i)^2=0$;

2) $(1+i)^3-(1-i)^3=0$;

3) $(a-1-i)(a+1+i)=a^2-2i$;

4) $\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}=-i$.

1146. Выполнить действия:

1) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$; 2) $\frac{a+bi}{c+di}-\frac{a+bi}{c-di}$;

3) $\frac{\sqrt{1+m}+i\sqrt{1-m}}{\sqrt{1+m}-i\sqrt{1-m}}-\frac{\sqrt{1-m}+i\sqrt{1+m}}{\sqrt{1-m}-i\sqrt{1+m}}$;

4) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$; 5) $\frac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$.

1147. На основании условия равенства комплексных чисел найти действительные числа x и y, если:

1) $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$;

2) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$;

3) $\frac{8i}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$;

4) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$;

5) $aix+biy-a=i-a^2x-b^2y$.

1148. Доказать, что если

$m=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $n=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, то:

1) $m^3=1$; 2) $n^3=1$; 3) $m^2=n$; 4) $n^2=m$.

1149. Решить следующие квадратные уравнения и проверить свойство суммы и произведения корней каждого из них:

1) $x^2-4x+5=0$; 2) $x^2+4x+6=0$;

3) $9x^2-18x+13=0$; 4) $4x^2+3x+1=0$.

1150. Составить квадратное уравнение по его корням:

1) $x_1 = \frac{-1 + 4i\sqrt{5}}{3}$; $\quad x_2 = \frac{-1 - 4i\sqrt{5}}{3}$;

2) $x_1 = 3 - \frac{1}{2}i$; $\quad x_2 = 3 + \frac{1}{2}i$;

3) $x_1 = 2 - i$; $\quad x_2 = 3 - 2i$;

4) $x_1 = \frac{2-i}{1+i}$; $\quad x_2 = 1 + i$.

1151. Решить следующие уравнения:

1) $x^3 + 1 = 0$; 2) $x^3 - 1 = 0$;
3) $x^3 + 27 = 0$; 4) $x^3 - 27 = 0$;
5) $8x^3 + 1 = 0$; 6) $27x^3 - 125 = 0$;
7) $x^4 - 16 = 0$; 8) $x^4 - 81 = 0$;
9) $(3x - 8)^2 + 5(3x - 8) - 150 = 0$;
10) $(5x + 4)^2 - 5(5x + 4) - 36 = 0$;
11) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; 12) $y^6 - 2y^3 + 1 = 0$.

1152. 1) Показать, что если x_1, x_2, x_3 суть корни уравнения $x^3 - 1 = 0$, то справедливы следующие равенства:

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; б) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1$.

2) Дано комплексное число $z = x + iy$. Определить множество точек плоскости, если:

а) $|z| = 1$; б) $|z| < 1$; в) $|z| > 1$; г) $1 < |z| < 2$.

ГЛАВА XIV.

НЕРАВЕНСТВА И ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ.

§ 48. Неравенства первой степени с одним неизвестным.

1153. Сложить неравенства:

1) $18 > 15$; $1 > -3$;
2) $4 < 6$; $-5 < -2$;
3) $5a + 1 > 2a - 7$; $a - 4 > 3 - a$;
4) $5a + b < 2a + 1$; $3b - 2a < 15 - 4a$.

1154. В следующих примерах вычесть второе неравенство из первого:

1) $10 > 4$; $8 < 12$;
2) $-3 > -5$; $2 < 4$;
3) $5 < 10$; $-1 > -3$;
4) $5x > 10$; $3x < 15$.

1155. Перемножить почленно неравенства:

1) $4 > 3$; $5 > 2$;
2) $4 > -5$; $3 > 2$;
3) $2 > -4$; $-4 > -6$;
4) $-5 < 3$; $-6 < 2$.

Решить неравенства:

1156. 1) $5 - \frac{x}{3} < 3\frac{1}{2} - \frac{4x + 1}{8}$; 2) $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x - 3}{6}$;

3) $5(x - 1) - x(7 - x) < x^2$; 4) $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$.

1157. 1) $x - \frac{x - 1}{2} > \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 2}{3}$;

2) $\frac{5x - 1}{4} - \frac{3x - 13}{10} > \frac{5x + 1}{3}$;

3) $|x - 3| > 5$; 4) $|x + 2| < 8$.

Решить системы неравенств:

1158. 1) $\begin{cases} 5(x + 1) + 6(x + 2) > 9(x + 3), \\ 7x - 3(2x + 3) > 2(x - 18); \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 3)(x - 4) < (x + 1)(x + 2), \\ x(x + 1) + x(x + 2) > (2x - 1)(x + 3). \end{cases}$

1159. 1) $\begin{cases} 2-\frac{5+x}{7}<1-\frac{9-x}{14}, \\ 12-\frac{1}{3}\left(47-\frac{60}{x}\right)>3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{7-x}{2}-3<\frac{3+4x}{5}-4, \\ \frac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x). \end{cases}$

1160. 1) $\begin{cases} \frac{3x+5}{7}+\frac{10-3x}{5}>\frac{2x+7}{3}-8, \\ \frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}>\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}>4-\frac{7-3x}{5}, \\ 7(3x-6)+4(17-x)>11-5(x-3). \end{cases}$

1161. Найти целые решения следующих систем неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-10>0, \\ 5\frac{1}{3}x-51<6x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1-\frac{3x-88}{7}>5x, \\ 4x+5-\frac{1}{6}\left(25x+29\frac{1}{2}\right)<0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2}<2x, \\ \frac{2x+15}{9}>\frac{1}{5}(x-1)+\frac{x}{3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2<\frac{2x-8}{6}-\frac{18-4x}{3}, \\ 9-\left(\frac{x-2}{4}+\frac{2}{3}\right)>x. \end{cases}$

Решить неравенства:

1162. 1) $(x-2)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)>0$;

3) $(x-3)(x-7)<5(x-3)$;

4) $(3x-1)(4-x)(2x-3)^2<0$.

1163. 1) $\frac{4-2x}{1+3x}>0$; 2) $\frac{3a+7}{2-6a}>0$;

3) $\frac{5-2a}{8+5a}>0$; 4) $\frac{5x-8}{2x+4}<0$.

1164. Одна сторона треугольника равна 3 *см*, а разность двух других сторон равна 1 *см*. Найти стороны этого треугольника, если они выражаются в целых числах.

1165. В двузначном числе цифра десятков на 2 меньше цифры единиц. Найти это число, если известно, что оно больше 21 и меньше 38.

1166. Числитель дроби меньше её знаменателя на единицу; если к числителю и знаменателю этой дроби прибавить по единице, то дробь будет больше $\frac{1}{2}$; если от числителя и знаменателя отнять по единице, то дробь будет меньше $\frac{6}{7}$. Найти эти дроби.

1167. Если к некоторому двузначному числу прибавить его половину, то в результате получится число, большее 128, но меньшее 130. Найти это число.

1168. Если бы турист проезжал в день на 20 *км* больше того, что он в действительности проезжает, то он за 8 дней проехал бы больше 900 *км*, а если бы он ежедневно проезжал на 12 *км* меньше, то и в 10 дней не успел бы проехать 900 *км*. Сколько километров в день проезжал турист?

1169. Пароход прошёл a километров по течению реки и вернулся обратно. Скорость парохода v *км* в час, а скорость течения реки v_1 *км* в час ($v > v_1$). Доказать, что время, которое затратил пароход на движение туда и обратно, всегда больше того времени, которое он затратил бы на прохождение того же расстояния в стоячей воде.

1170. Доказать, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел больше их среднего геометрического.

1171. Доказать, что положительная правильная дробь увеличивается от прибавления к числителю и знаменателю одного и того же положительного числа, а неправильная дробь уменьшается.

1172. Доказать, что во всяком треугольнике полупериметр больше каждой из его сторон.

1173. Доказать, что если a, b, c суть длины трёх сторон треугольника, то имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc).$$

Сформулировать свойство сторон треугольника, выраженное данным неравенством.

1174. Доказать, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, меньше половины гипотенузы.

1175. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике квадрат удвоенной высоты, опущенной на гипотенузу, меньше суммы квадрата гипотенузы с удвоенным произведением катетов.

Доказать неравенства:

1176. 1) $k+\frac{1}{k}\geqslant 2,\ k>0$; 2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,\ a>0,\ b>0$;

3) $\frac{2a}{1+a^2}\leqslant 1$; 4) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4,\ a>0,\ b>0.$

1177. 1) $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$ (a, b и c — положительные числа);

2) $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2,\ a>0,\ b>0$;

3) $x^5+y^5-x^4y-xy^4\geqslant 0$, если $x>0,\ y>0$.

§ 49. Исследование уравнений первой степени с одним неизвестным.

1178. Определить, при каких значениях t следующие уравнения имеют положительные решения:

1) $4x=3t-15$; 2) $2x-1=4+5t$; 3) $3(2-x)=4(t-2x)$;

4) $\frac{t}{4}=\frac{3}{x}$; 5) $\frac{7}{1+x}=\frac{t}{x}$; 6) $4-t=\frac{2}{x-1}$.

1179. Определить, при каких значениях k следующие уравнения имеют отрицательные решения:

1) $\frac{5}{2x-k}=\frac{3}{4-kx}$; 2) $\frac{1}{x+1}=1-k$; 3) $k-2=\frac{3x+1}{x+1}$;

4) $\frac{k(x+2)-3(k-1)}{x+1}=1$; 5) $\frac{4x-1}{x-1}=k+3$;

6) $\frac{5}{3x-k}=\frac{3}{kx-4}$; 7) $\frac{4x+3k}{3}=\frac{5x-2k}{4}$.

1180. Исследовать, при каких значениях параметров (букв, входящих в уравнение) нижеследующие уравнения имеют: а) положительное решение; б) отрицательное решение; в) нулевое решение; г) бесконечное множество решений; д) совсем не имеют решений:

1) $ax-a=3x-5$; 2) $2mx+3=2m-x$;

3) $ab+bx-b=3ax$; 4) $\frac{a}{3a+x}=\frac{2}{b+x}$.

1181. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $3(x+1)=4+ax$ будет иметь решение, большее, чем -1.

Решить задачи и исследовать полученную формулу решения. При исследовании решения определить:

1) при каких значениях параметров и при каких соотношениях между ними задача имеет смысл;

2) какие значения может принимать неизвестное, чтобы оно удовлетворяло условию задачи;

3) какие решения уравнения удовлетворяют этим условиям.

1182. На одном складе a тонн угля, а на другом складе b тонн. Ежедневно на оба склада поступает по d тонн угля. Через сколько дней на первом складе будет угля в 2 раза больше, чем на втором?

1183. В бассейн проведены две трубы; первая труба наполняет бассейн за a часов, вторая выливает из наполненного бассейна всю воду за b часов. За сколько времени наполнится пустой бассейн при одновременном действии обеих труб?

1184. Один рабочий изготовляет в день a деталей, другой b деталей. Первый изготовил уже p деталей, второй q деталей. Через сколько дней после этого число деталей, изготовленных каждым рабочим, при одновременной их работе, будет одинаково?

1185. В одном городе a жителей, а в другом городе b жителей. Население первого города ежегодно увеличивается на m человек, а население второго города ежегодно увеличивается на n человек. Через сколько лет в обоих городах будет жителей поровну?

1186. В m литрах морской воды содержится n граммов соли. Сколько литров чистой воды надо добавить, чтобы m литров раствора содержали q граммов соли?

1187. Два автомобиля выезжают одновременно из двух городов A и B и едут по одному и тому же направлению от A к B и далее. Скорость первого автомобиля a *км* в час, скорость второго b *км* в час. Через сколько часов первый автомобиль догонит второй, если расстояние между A и B равно d километрам?

§ 50. Исследование системы уравнений первой степени с двумя неизвестными.

1188. Не решая следующих систем уравнений, определить, будет ли данная система иметь: а) одно решение; б) бесконечное множество решений; в) не будет иметь решений.

1) $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ x + 3y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x + 6y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 3y = 15, \\ 10x - 6y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 10y = 16, \\ 6x + 20y = 32; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x - 9y = 4, \\ 4x - 6y = 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x + 10y = 12, \\ 6x + 15y = 18. \end{cases}$

Исследовать решение нижеследующих систем уравнений и дать графическое истолкование полученных результатов путём определения точки пересечения двух прямых, определяемых уравнениями системы:

1189. 1) $\begin{cases} x+y=2, \\ 4x-y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=1, \\ y-2x=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x+2y=6. \end{cases}$

1190. 1) $\begin{cases} 3x+y=4, \\ 4-y=5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 4x+6y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=4, \\ 2x+2y=8. \end{cases}$

1191. Определить, при каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} 3x+7y=m, \\ 2x+5y=20 \end{cases}$$

имеет положительные решения, т. е. $x>0$ и $y>0$.

1192. Определить, при каких значениях k система уравнений

$$\begin{cases} 3x-6y=1, \\ 5x-ky=2 \end{cases}$$

имеет отрицательные решения, т. е. $x<0$ и $y<0$.

1193. Определить, при каких значениях m и n следующие системы уравнений имеют бесконечное множество решений:

1) $\begin{cases} mx+ny=8, \\ 5x+3y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} mx+(n-1)y=2, \\ 3x+10y=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+3y=8, \\ mx+y=n; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x+y=10, \\ (n+1)x+\frac{1}{n}y=n^2+m. \end{cases}$

1194. Определить, при каких значениях a следующие системы уравнений не имеют решений:

1) $\begin{cases} 4x+3y=12, \\ 2x+ay=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+8y=10, \\ x-ay=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax-5y=9, \\ 2x-3y=15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x+2ay=1, \\ (3a-1)x-ay=1. \end{cases}$

1195. Дана система двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} (3+m)x+4y=5-3m, \\ 2x+(5+m)y=8. \end{cases}$$

Найти, при каких значениях m эта система: а) имеет бесконечное множество решений; б) не имеет решения.

Решить и исследовать решение следующих задач:

1196. Для отопления дома сделан запас угля, из которого ежедневно расходуется по одинаковому числу килограммов. Спустя m дней из этого запаса осталось a килограммов, а спустя n дней b килограммов. Как велик был запас угля и сколько килограммов угля расходовали ежедневно?

1197. Через h минут после начала подогревания вода в сосуде имела температуру $t°$, а через h_1 минут $t_1°$. Какова была первоначальная температура воды и на сколько градусов нагревалась она в каждую минуту, если предположить, что нагревание было равномерным?

1198. Два автомобиля едут равномерно от пункта A по шоссе в одном и том же направлении. В некоторый момент времени первый автомобиль находился от A на расстоянии m километров, а второй — на расстоянии n километров. Через сколько часов после этого и на каком расстоянии от пункта A второй автомобиль догонит первый, если скорость первого a *км* в час, а второго b *км* в час?

1199. Куплено m килограммов муки двух сортов на сумму k рублей; килограмм муки первого сорта стоил a рублей, килограмм муки второго сорта b рублей. Сколько было куплено муки каждого сорта?

1200. Один покупатель купил a метров ситца и b метров сатина и за всю покупку заплатил d рублей; другой покупатель по той же цене взял m метров ситца и n метров сатина и заплатил также d рублей. Сколько стоил метр сатина и метр ситца отдельно?

1201. Если смешать a литров спирта первого сорта и b литров спирта второго сорта, то получится спирт крепостью в k градусов; если же смешать b литров спирта первого сорта и a литров спирта второго сорта, то получится спирт в t градусов. Определить крепость спирта каждого сорта.

§ 51. Неравенства второй степени.

Решить неравенства:

1202. 1) $x^2-14x+45>0$; 2) $x^2+2x>6x-15$;
3) $x^2-11x+30>0$; 4) $x^2-4x+3>0$.

1203. 1) $3x^2-5x-2>0$; 2) $5x^2-7x+2<0$;
3) $3x^2-7x-6<0$; 4) $3x^2-2x+5>0$.

1204. 1) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}>0$; 2) $\frac{(x-3)(x-5)}{x-2}>0$;
3) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$; 4) $\frac{x^2-6x+18}{x-4}>0$.

1205. 1) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}>0$; 2) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$;
3) $2-\frac{x-3}{x-2}>\frac{x-2}{x-1}$; 4) $3-\frac{2x-17}{x-5}>\frac{x-5}{x+2}$.

1206. При каких значениях x следующие выражения не имеют смысла:

1) $\lg(x^2-6x+9)$; 2) $\lg(x^2-5x+6)$;
3) $\lg(3x^2-4x+5)$; 4) $\lg(5x^2-8x-4)$.

При каких значениях m следующие неравенства удовлетворяются при любых действительных значениях x:

1207. 1) $x^2+2x+m>0$; 2) $x^2-5x-m>0$;
3) $x^2+6x+(5m-1)(m-1)>0$;
4) $x^2+2x+m>10$.

1208. 1) $mx^2+12x-5<0$;
2) $(m+3)x^2-5x-4<0$;
3) $x^2+(m+2)x+8m+1>0$;
4) $x^2+2(m+1)x+9m-5>0$.

1209. При каких значениях m следующие трёхчлены второй степени представляют полные квадраты:

1) $(4m-3)x^2-3(m+1)x+2(m+1)$;
2) $(6m-5)x^2-5(m-1)x+2m-6$;
3) $(m-1)x^2+2mx+3m-2$;
4) $3(m+6)x^2-3(m+3)x+2m-3$.

1210. Найти коэффициенты трёхчлена ax^2+bx+c, зная, что он обращается в нуль при $x=6$ и что его наименьшее значение равно (-8) при $x=4$.

1211. Известно, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет наибольшее значение, равное 25 при $x=\frac{1}{2}$, а при $x=0$ принимает значение, равное 24. Найти коэффициенты этого трёхчлена.

1212. Вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ имеет координаты $x=6$ и $y=-12$. Зная, что ветви параболы направлены вверх от оси x и что одна из ветвей пересекает ось x в точке $(8; 0)$, найти коэффициенты a, b и c.

1213. Парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось y в точке, ордината которой равна 15. Зная, что ветви параболы направлены вверх от оси x и что координаты вершины параболы $(-2; 7)$, найти коэффициенты a, b и c.

§ 52. Исследование квадратных уравнений.

1214. Определить, при каких значениях m корни следующих уравнений будут действительными различными, действительными равными, мнимыми различными:

1) $(5m+1)x^2+(7m+3)x+3m=0$;
2) $mx^2-(1-2m)x+m=0$;

3) $(m-1)x^2-2(m+1)x+m-2=0$;

4) $x^2+2(m-4)x+m^2+6m=0$;

5) $(3+m)x^2-3(6-m)x+5-18m=0$;

6) $(m-2)x^2-(3m+6)x+6m=0$;

7) $x^2+2(m-1)x+3m^2+5=0$.

Решить задачи и исследовать решение, определив:

1) при каких значениях параметров и при каких соотношениях между ними задача имеет смысл;

2) каково должно быть решение (положительное, отрицательное, нулевое), чтобы оно удовлетворяло условию задачи;

3) какой из корней уравнения удовлетворяет этим условиям[1]).

1215. При прохождении одного и того же расстояния в s километров трёхтонная автомашина расходует бензина на a литров больше полуторатонной. Сколько литров бензина расходует каждая из автомашин на пробег этого расстояния, если полуторатонная машина при затрате одного литра бензина проходит на b метров больше трёхтонной?

1216. Перевозка одной тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге на b копеек дороже, чем водным путём. Сколько тонн груза можно перевезти от M до N по железной дороге на сумму в s рублей, если водным путём на ту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по железной дороге?

1217. Чтобы проплыть s метров по течению реки, пловец должен затратить времени на t минут меньше, чем он употребил бы, проплывая то же расстояние в стоячей воде. Какова скорость пловца в стоячей воде, если скорость течения реки v *м* в час?

1218. Два самолёта вылетают одновременно из пункта A в пункт B, расстояние между которыми s километров. Скорость первого самолёта на m *км* в час меньше скорости второго, поэтому первый самолёт прилетает в B на n часов позже другого. Найти скорость первого самолёта и время, затраченное им на перелёт из A в B.

1219. Из двух пунктов A и B выехали одновременно два велосипедиста в пункт C. Первый приехал в C через a часов, а второй, чтобы попасть в C одновременно с первым, должен проезжать каждый километр на c часов скорее первого, так как расстояние от B до C на b километров больше расстояния от A до C. Определить расстояние от A до C.

1220. Два поезда одновременно вышли из пунктов A и B навстречу друг другу. При встрече оказалось, что первый поезд прошёл на a километров больше второго. Продолжая путь с прежней скоростью, первый поезд пришёл в B через m часов после встречи, а второй поезд пришёл в A через n часов после встречи. Сколько километров каждый поезд прошёл до встречи?

---

[1]) Работу целесообразно начать с решения задач № 505—510.

1221. За n часов трактор вспахивает на p гектаров больше лошади. Сколько гектаров вспашет за n часов лошадь и сколько гектаров вспашет за это же время трактор, если трактор вспахивает 1 *га* на t часов скорее лошади?

1222. Два элеватора принимают зерно. Пропускная способность первого на k тонн в час больше второго. Определить, сколько тонн зерна принимает в час каждый элеватор, если для приёма по m тонн зерна каждым первому требуется на t часов меньше времени, чем второму.

1223. В колхозе с первого участка пашни собрано a центнеров пшеницы. Урожай пшеницы на втором участке был выше, и то же количество зерна было собрано с площади, которая на m гектаров меньше первого участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с 1 *га* каждого участка, если урожай на втором участке был на b центнеров с гектара выше, чем на первом?

1224. Выполнение некоторой работы поручено двум бригадам рабочих. Работу начала одна первая бригада и проработала n дней, а оставшуюся часть работы закончила затем одна вторая бригада за m дней. За сколько дней каждая бригада, работая отдельно, может выполнить всю работу, если второй бригаде требуется для этого на t дней больше, чем первой?

1225. Для углубления фарватера поставлены три экскаватора. Если эту работу будет выполнять один первый из них, то он кончит работу на a дней позже, чем все три экскаватора вместе. Если же будет работать только второй, то он кончит её на b дней позже, чем все вместе. Одному третьему экскаватору потребуется времени в c раз больше, чем при работе всех трёх вместе. Сколько времени потребуется каждому экскаватору для выполнения всей работы отдельно?

1226. Расстояние между двумя городами равно a километрам. Два автомобиля, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t часов раньше второго. Если же они выедут одновременно друг другу навстречу, то встреча произойдёт через $2t$ часов. Сколько километров в час проезжает каждый автомобиль?

1227. Две бригады заработали по одинаковому числу рублей. В первой бригаде было на a рабочих меньше, чем во второй, вследствие чего каждому рабочему второй бригады досталось b рублями меньше, чем каждому рабочему первой бригады. Число рублей, заработанных каждой бригадой, на c больше числа рабочих в обеих бригадах вместе. Сколько было рабочих в каждой бригаде?

ГЛАВА XV.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

1228. 1) Мастерская изготовляет некоторое количество одинаковых деталей на сумму s рублей. Если себестоимость одной детали снизить на p копеек, то на ту же сумму мастерская изготовит на n деталей больше прежнего. Сколько деталей изготовит мастерская?

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2x}{2x^2+x}$.

3) При каких вещественных значениях x и y справедливо следующее равенство:

$$\frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{1+i}=1-3i?$$

4) Исследовать функцию $y=2+4x-3x^3$ и построить её график.

1229. 1) В шар радиуса R требуется вписать цилиндр наибольшего объёма. Найти объём этого цилиндра.

2) Доказать неравенство:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}>6$$

(a, b и c — неравные между собой положительные числа).

3) Найти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-2x-12}{x^2-5x+6}$.

4) Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y-x=5, \\ xy=12. \end{cases}$$

1230. 1) Дорога от A до B длиной в 11,5 *км* идёт сначала в гору, потом по ровному месту и потом под гору. Турист, идя из A в B, прошёл всю дорогу за 2 часа 54 мин., а на обратную дорогу затратил 3 часа 6 мин. Скорость его ходьбы в гору 3 *км* в час, по ровному месту 4 *км* в час, под гору 5 *км* в час. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту?

2) Доказать, что три различных числа не могут одновременно составлять и арифметическую и геометрическую прогрессию.

3) Вычислить без помощи таблиц:

$$x=100^{1-\lg\frac{5}{2}}.$$

4) Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=2x^2-3x+4$ в точке её с абсциссой, равной $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Пояснить результат на чертеже.

1231. 1) В конус, высота которого равна 15 *см*, а радиус основания 6 *см*, требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность. Найти высоту цилиндра и радиус его основания.

2) Доказать, что уравнение $(x-a)(x-b)-c^2=0$ имеет действительные корни при любых действительных значениях a, b, c.

3) Решить неравенство: $\frac{x+1}{x^2+4}>0$.

4) Исследовать функцию $y=x^3-x^2-x-1$ и построить её график.

1232. 1) В шар радиуса R требуется вписать конус наибольшего объёма. Найти радиус основания конуса и его высоту.

2) Решить неравенство:

$$\frac{x^2-5x+6}{2x-1}>0.$$

3) Доказать, что

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=2.$$

4) Исследовать функцию $y=2x^3-5x^2-4x$ и построить её график.

1233. 1) A выполняет некоторую работу в срок, на a дней больший, чем B, и на b дней больший, чем C. A и B, работая вместе, выполняют эту работу в срок, равный сроку C. Определить время, в которое выполняет эту работу каждый из них отдельно.

2) Вычислить:

$$\left[9^{-\frac{1}{4}}+(3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right]\cdot\left[9^{-\frac{1}{4}}-(3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right].$$

3) Решить систему неравенств:

$$\begin{cases}\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}>\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6},\\ \frac{2x+7}{3}<\frac{3x+5}{7}+8+\frac{10-3x}{5}.\end{cases}$$

4) Исследовать функцию $y=1+12x-x^3$ и построить её график.

1234. 1) Города A и B находятся на расстоянии l километров один от другого. Тонна угля в городе A стоит a рублей, в городе B — на p процентов дороже. Провоз тонны угля обходится q копеек с километра. В каком пункте расстояния AB одинаково выгодно брать уголь как из города A, так и из города B?

2) Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$.

3) Решить уравнение:

$$\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x+a-b}=\sqrt{b}, \text{ если } a>0,\ b>0 \text{ и } a\neq b.$$

4) Четвёртый член арифметической прогрессии равен 9, а девятый член равен (—6). Сколько надо взять членов прогрессии, чтобы сумма их была равна 54?

1235. 1) В конус, радиус основания которого равен R, а высота H, требуется вписать цилиндр наибольшего объёма. Найти радиус основания цилиндра и его высоту.

2) Доказать неравенство:

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)>16\,abc,$$

если $a>1$, $b>1$, $c>1$.

3) Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии, все члены которой положительные числа, равна 221. Третий член этой прогрессии больше первого на 136. Найти сумму шести членов данной прогрессии.

4) Решить уравнение:

$$\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18.$$

1236. 1) Чтобы в n дней изготовить m штук некоторых деталей, надо их изготовление поручить или a рабочим высокой квалификации или b рабочим средней квалификации. Требуется в p дней изготовить q штук этих деталей, причём для этой работы удалось выделить лишь c рабочих высокой квалификации. Сколько нужно ещё рабочих средней квалификации, чтобы выполнить работу в требуемое время?

2) Вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x+2}-\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-5x^3}{x+3x^3}.$$

3) Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 9+\dfrac{4x-11}{7}<\dfrac{x-3}{5}, \\ (2+x)^2+8x^2<(3x-1)^2-12. \end{cases}$$

4) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{3\sqrt{6}}{2}$, а второй её член равен $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти первый член этой прогрессии.

1237. 1) Из зенитного орудия вертикально вверх выпущен снаряд с начальной скоростью $v_0 = 196$ *м* в сек. Расстояние снаряда от земли вычисляется по формуле

$$s = 196t - 0{,}5\,gt^2.$$

Найти наибольшую высоту, которой достигает снаряд (сопротивление воздуха не учитывается).

2) Найти, при каких значениях a дробь

$$\frac{5a-4}{6-a} > 1.$$

3) Доказать тождество:

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} : \left[\frac{\sqrt{b} - \frac{a}{(ab)^{-0,5}}}{1-a} - \sqrt{ab}\right] + \frac{a}{b}\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3b-2a}{3b}.$$

4) Исследовать функцию

$$y = -3x^2 + 12x + 1$$

и построить её график.

1238. 1) В зрительном зале имеется n стульев, расположенных рядами, по одинаковому числу стульев в каждом ряду. Если в каждом ряду добавить по p стульев, а число рядов уменьшить на m, то общее число мест в зале останется прежним. Сколько рядов стульев в зале и сколько стульев в каждом ряду?

2) Найти, при каких значениях x квадратный трёхчлен

$$2x^2 - 5x + 2$$

а) положителен; б) отрицателен; в) равен нулю; г) имеет наибольшее или наименьшее значение и какое именно.

3) Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$.

4) Решить неравенство:

$$\frac{2x^2-3x-459}{x^2+1} > 1.$$

ОТВЕТЫ[1].

Глава I.

Задачи для повторения и углубления пройденного.

7. 1) $(m+1)^2(m^2-m+1)$; 2) $(n+1)(n-1)(n^2+n+1)$.
8. 1) $2y(3x^2+y^2)$; 2) $8xy(x^2+y^2)$. **9.** 2) $(a-4)(a+3)$;
3) $(m+5)(m-2)$; 4) $2(x+3)(x+2)$.
10. 1) $(m^2+n^2+mn)(m^2+n^2-mn)$;
2) $(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; 4) $(a+2)^2(a-1)$.
11. 1) $(a-1)(a^2+2a+2)$; 3) $n^2(n+1)^2(n^2-2n+2)$.
12. 2) $(c+1)(c+2)(c+5)$; 4) $(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$.
13. 1) 0,25; 3) $-0,6$. **14.** 1) $-\frac{1}{2(3a+1)}$; 2) $\frac{2a}{a^2+a+1}$; 4) $\frac{a^2-ac+c^2}{3(ac+1)}$.
15. 2) $\frac{9}{x-y}$; 4) $\frac{1}{a+c}$. **16.** 1) 1,5; 2) $\frac{5}{42}$. **22.** 1) 5; 2) 7. **23.** 1) 1; 2) 3.
24. 1) 3; 2) 2. **25.** 2) $\frac{ab}{a+b}$. **26.** 1) $\frac{3(n+1)}{4}$; 2) $\frac{a}{a+1}$.
27. 1) $\frac{m(a+b)}{a}$; 2) $\frac{2a+c}{3}$. **28.** 1) a^2+1.
38. 1) $x>3$; $x<-1$; 3) $x<13$; $x>-3$. **39.** 1) 1; -1. **40.** 2) 19; -1. **41.** 1) 5; 7.
42. 2; 1. **43.** 1) 8; 4. **71.** 1) -1; 2) 2. **74.** 1) 5; 2) 1; 1. **75.** 3) $v\approx 0,6t+332$.

Глава II.

Степени и корни.

98. 17) $\pm\frac{3}{4}$; 18) ± 5; 19) ± 8; 20) ± 7.
141. 4) $\frac{b(3a^2-3ab+b^2)}{(a-b)^4}$. **142.** $2\frac{1}{4}$. **143.** 6. **148.** 1) $x\geqslant 1$.
151. 1) $5-a$; 2) $a-5$. **168.** 1) $(a-1)\sqrt{a-1}$; 3) $x(a-2)\sqrt[4]{x^3(a-2)}$.
169. 3) $2(a-5)\sqrt{2}$ при $a\geqslant 5$.

---

[1]) В ответах к упражнениям и задачам допустимые значения букв не указаны; учащиеся должны это сделать сами, дополнив данный ответ в соответствии с результатами исследования.

183. 1) $-\sqrt{2a(a-2)}$; 3) $-\sqrt{\frac{3a(b-a)}{b+a}}$. **195.** 3) $b\sqrt[m]{ab^2c^{m-1}}$.

196. 1) $6x\sqrt{3xy}$; 3) $\sqrt{abc}$. **197.** 2) $\frac{x}{2y}\sqrt[3]{12xy}$; 4) $2x^2y\sqrt{x^2+3y}$.

198. 2) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{9(9a-2b)}$.

199. 1) $x\sqrt[3]{x^2-y^2}$; 3) $a\sqrt{b}$. **200.** 1) $4b\sqrt[n]{ab^2}$; 2) $y^2\sqrt[n]{x^2y^2}$.

211. 1) $19\sqrt{2}$; 2) $15\sqrt{2}-3\sqrt{5}$; 3) $4\sqrt{10}-7\sqrt{6}$; 4) $4\frac{1}{4}\sqrt{2}+3\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

212. 1) $8\sqrt{a}$; 2) $4\sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt[4]{a}$; 4) $7\sqrt{x}-5\sqrt[3]{y}$.

213. 1) 243; 2) 36; 3) 15; 4) 2. **214.** 1) 1; 2) $9\sqrt{2x}$. **215.** 1) $6\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 2) 0.

216. 1) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$; 2) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}$. **217.** 1) $-2\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$; 2) $1\frac{31}{60}\sqrt{6}$.

218. 1) $10ab\sqrt{7ab}$; 2) $2a^2(2+5b)\sqrt[3]{b}$.

219. 1) $(3-b)\sqrt[3]{a^2b}$; 2) $\frac{xy-x^3-x^4y^3+y^2}{x^2y^2}\sqrt[4]{x^2y^3}$.

220. 1) $4b\sqrt[3]{a}+(5a-2b)\sqrt{x}$; 2) $3{,}35\sqrt{6z}$.

221. 1) $2y$; 2) $2b$. **222.** 1) $2x\sqrt{2}+y-1$; 2) $2c\sqrt{x}$.

223. 1) $\frac{x^3-x^2y-xy^2+y^3-4x^2-4x^5+4x^3y^2}{4x^2(x^2-y^2)}\sqrt{2x(x+y)}$;

2) $\frac{1-x+x^2-x^3-x^4}{x(1-x^2)}\sqrt[3]{x(1-x^2)}$.

224. 1) $\frac{a-x}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}$; 2) 0. **225.** 1) 114,4; 2) 7. **226.** 1) 9; 2) 15.

230. 1) -39; 2) $12-18\sqrt{2}+16\sqrt{3}$.

231. 1) $14a^4-12a^3-8a^2$; 2) $ab+2b-a+1$.

232. 1) $\frac{a^3(bn-b^3m+am)}{m}$; 2) $8x^3y\sqrt[3]{y}-10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2}+2x^2y^3\sqrt[3]{x}$.

233. 1) $3+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$; 2) $19\sqrt{2}$.

234. 1) $6a^2+5a\sqrt{x}-6x$; 2) $m^2-n+(m-1)\sqrt{mn}$.

235. 1) 9; 2) 9. **236.** 1) $\frac{7+\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{17+7\sqrt{2}}{12}$;

3) $\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{15}$; 4) $\frac{13-3\sqrt{6}-4\sqrt{5}}{24}$.

237. 1) 4; 2) 16; 3) 25; 4) 16. **238.** 1) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$; 2) 24; 3) 8; 4) 4.

240. 1) a^2-3; 2) $a-x$; 3) 2; 4) 2. **241.** 1) a; 2) $2b$; 3) 1; 4) $1-2x$.

244. 1) 9; 2) 10. **249.** 1) 30; 2) $16\sqrt{5}$; 4) $2\frac{1}{4}-\sqrt[3]{9}$.

250. 1) $x+y$; 2) $a-b$; 3) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 4) $n+1$.

251. 1) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; 2) $a+b-\sqrt{ab}$.
252. 1) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$; 2) $\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; 3) $\sqrt{7}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.
253. 1) $\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})$; 3) $\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.
254. 1) $\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$; 2) $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$; 3) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)$.
255. 1) $\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b}+1)$; 2) $\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$.
256. 1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$; 2) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)$;
3) $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)$; 4) $(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}+1)$.
257. 1) $\frac{1}{7}\sqrt{21}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; 3) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{a^2xy}}{a}$.
258. 1) $\sqrt[3]{2m}-\sqrt[3]{3n}$; 2) $\sqrt[3]{5a}+\sqrt[3]{4b}$; 3) $\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{2y^2}$; 4) $x-\sqrt{2xy}$.
270. 1) $8-3\sqrt[6]{32}$; 2) $10\sqrt[3]{3}+5\sqrt[6]{3}$;
4) $1\frac{1}{2}\sqrt[6]{18}-\sqrt[12]{648}+1\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
271. 1) $4\sqrt[3]{m}-3\sqrt[4]{m}-6\sqrt[6]{m}$; 2) $a\sqrt[6]{xy}+a^2-a^3\sqrt[6]{xy^2}$;
3) $\frac{1}{ab^2}\sqrt[6]{a^2b}-6ab^3\sqrt{a}+\frac{b}{a^2}\sqrt[24]{a^8b}$.
272. 1) $1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{72}$; 2) $\sqrt{6}-\sqrt{243}+\sqrt[6]{32}-\sqrt[3]{6}$.
273. 1) $x-\frac{x}{2}\sqrt[6]{x}-3x\sqrt[3]{x}+\frac{3x}{2}\sqrt{x}$;
2) $a^2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{a^5}-a^3\sqrt[4]{a}-a\sqrt[12]{a^{11}}$;
4) $4\sqrt[12]{x^7y^{10}}+y\sqrt[12]{x^5}+3y\sqrt[12]{x^4y}-8xy-2y\sqrt[6]{x^5y}-6y\sqrt[4]{x^3y}$.
274. 1) $x\sqrt{3xy}-x\sqrt[4]{12xy^3}+2xy$; 2) $y\sqrt[3]{2x}+y\sqrt[6]{2x^4}+xy$;
3) $\sqrt{ax}-2\sqrt[3]{a^2x}$; 4) $\sqrt{ax}+2\sqrt[3]{a^2x}$.
275. 1) $-ax\sqrt[3]{ax}-x\sqrt[12]{a^6x^{11}}$; 2) $\sqrt[4]{b^3}-3\sqrt[4]{ab^2}+2\sqrt[4]{a^2b}$;
3) $5\sqrt[3]{a}-9\sqrt{a}-7\sqrt[12]{a^5}$; 4) $\sqrt[4]{a}+3\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{c}$.
286. 1) $38-12\sqrt{10}$; 2) $48{,}5+4\sqrt{6}$; 3) 27; 4) $15\frac{1}{8}$.
288. 1) $2-4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}$; 2) $3-3\sqrt[6]{3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{3}$;
3) $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[6]{a^5}+a$; 4) $a^2\sqrt[3]{b^2}-2ab\sqrt[3]{ab}+b^2\sqrt[3]{a^2}$.
289. 1) $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$; 2) $4-2\sqrt{3}$;
3) $36\frac{1}{2}+3\sqrt{2}-8\sqrt{3}-8\sqrt{6}$; 4) $405-100\sqrt{2}+60\sqrt{3}-150\sqrt{6}$.
290. 1) 14; 2) 26; 3) 4; 4) 2. **291.** 1) $4x-\frac{\sqrt{y}}{y}$; 2) $\frac{ab^2\sqrt[3]{a}-9}{b^2}$;
3) $8a-12a\sqrt[6]{ax}+6a\sqrt[3]{ax}-a\sqrt{ax}$; 4) $\frac{a}{b}$.
296. 1) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$; 3) $\sqrt[8]{a^3}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}}$.
297. 1) $\sqrt[8]{128}$; 2) $\sqrt[12]{2187}$; 3) $\sqrt[8]{\frac{1}{128}}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{1}{5^7}}$.

298. 1) $\sqrt[8]{a^7}$; 2) $\sqrt{m}$; 3) $\sqrt[24]{x^{28}}$; 4) $\sqrt[24]{a^{19}}$.

299. 1) $\sqrt[8]{\frac{m^3}{n^3}}$; 2) $\sqrt[6]{\frac{a^4}{b^3}}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{x}\sqrt[4]{ax}$.

304. 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[3]{9}$; 4) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{7}$; 5) $\sqrt[3]{a}$; 8) $n\sqrt[4]{n}$.

305. 1) $3\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[4]{5}$; 3) $\frac{\sqrt[5]{9}}{3}$; 4) $8\sqrt{2}$.

306. 1) $\frac{a\sqrt[7]{x^3}}{x}$; 2) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{b}$; 3) $\frac{a\sqrt[n]{x}}{x}$; 4) $\frac{a\sqrt[n]{x^{n-1}}}{x}$.

307. 3) $\frac{(a+b)\sqrt{a-b}}{2(a-b)}$; 4) $\frac{(a-b)\sqrt{a+b}}{b(a+b)}$.

308. 1) $\sqrt[3]{(a-b)^2}$; 2) $\sqrt[3]{m+n}$; 3) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{(a^2-9)^2}}{a-3}$.

309. 1) $2-\sqrt{2}$; 2) $6+2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7}+3$; 4) $2\sqrt{5}-2$.

310. 1) $\frac{m(\sqrt{m}-1)}{m-1}$; 2) $\frac{n(1+\sqrt{n})}{1-n}$; 3) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$;
4) $(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

312. 1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$; 3) $-2\sqrt{8}-2\sqrt{5}$;
4) $-2\sqrt{3}-2\sqrt{10}$.

313. 1) $6\sqrt{3}+9$; 2) $9\sqrt{2}-12$; 3) $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}$; 4) $\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}$.

314. 1) $\frac{217-9\sqrt{33}}{347}$; 2) $\frac{18+5\sqrt{10}}{2}$; 3) $-\frac{2\sqrt{10}+1}{13}$.

315. 1) $\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 2) $\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{n}$; 3) $-\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}$;
4) $\frac{x^2+1+\sqrt{x^4-1}}{2}$.

316. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}$; $\frac{n}{\sqrt{mn}}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}$;
2) $\frac{1}{6-3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$.

317. 1) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 3) $\frac{a-1}{a\sqrt{a}-a}$.

318. 1) $\frac{1}{(x+y)\sqrt[3]{x-y}}$; 2) $\frac{9-m}{9-6\sqrt{m}+m}$.

319. 1) $\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}$; 2) $\frac{29\sqrt{7}-35-10\sqrt{77}+21\sqrt{11}}{259}$.

320. 1) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{2}$; 2) $(\sqrt{2}+1)(2\sqrt{6}-5)$;
3) $a(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; 4) $-a(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

321. 1) $\frac{a\sqrt{110-22\sqrt{3}}}{22}$; 2) $3\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; 3) $\frac{\sqrt{30}+\sqrt{5}}{5}$;

4) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{a-b}$.

322. 1) $\frac{n(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$; 3) $2(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+2\sqrt[3]{2})$;

4) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$; 5) $\frac{2(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1)}{5}$;

6) $-\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}{4}$; 7) $-\frac{2(9\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}+4)}{23}$.

323. 1) $\frac{n(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{a+b}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{5}$;

5) $-(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3})$; 6) $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})(2+\sqrt{3})$;

7) $a(\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$.

324. 1) $4-3\sqrt{7}+\sqrt{11}$; 2) $\frac{59+8\sqrt{2}+13\sqrt{3}+26\sqrt{5}}{6}$;

3) $\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{13-\sqrt{5}}{2}$.

325. 1) $\frac{a+b}{a-b}$; 2) $\frac{2\sqrt{b}}{a(b-1)}$; 4) $\frac{2a}{b^2}$.

326. 1) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$; 2) $\sqrt{1-x}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $a(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b})$.

327. 1) 1; 3) $\frac{2}{1-a}$; 4) $\sqrt{b}-\sqrt{a}$.

328. 1) $\frac{\sqrt{a}}{a}$; 2) $\frac{\sqrt{a}}{2a(a-b)}$; 3) $\frac{a^4-2a^3\sqrt[6]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a^4}$.

329. 1) 1; 2) -1; 3) 3; 4) $2\sqrt[4]{ax}$. **330.** 1. **331.** $141+140\sqrt{6}$.

335. 1. **336.** $a-b$. **339.** $\sqrt[4]{b}$. **340.** 2) $2\sqrt[3]{ab}$.

341. $\frac{x^2-1}{x}$. **342.** 1) 10; 3) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$. **343.** $\frac{1}{4}$. **344.** $\frac{2}{27}$. **345.** 1) 4; 3) 32.

346. 4) $\sqrt{2}$; 5) $\frac{7}{16}$.

Глава III.

Уравнения второй степени и приводимые к ним.

353. 3) ± 8. **354.** 1) ± 2. **357.** 1) $\pm a$; 2) $\pm b$; 3) ± 1. **359.** 4) 0; $\frac{3a}{2}$.

367. 3) 8; -3; 4) 5; $-3\frac{1}{3}$. **368.** 1) 1; $\frac{1}{2}$; 3) 4; -7; 4) 2.

369. 2) 10; $-0{,}7$; 4) 7; $-\frac{7}{9}$. **370.** 1) 2; $-\frac{1}{2}$; 3) 18; 15,8.

371. 1) 5; $-1\frac{2}{5}$; 3) 0; 60. 373. 2) -1; $-4{,}7$; 3) -2; -3.

374. 2) 4; -5. 375. 2) $\frac{2}{3}$; -3; 4) 2,5; 5. 376. 2) 2; -9; 4) -2; $-8\frac{1}{2}$.

377. 1) 9; -4; 2) 2. 378. 2) 3; 3) 4. 379. 2) 10; $5\frac{1}{5}$; 4) 12; $8\frac{1}{4}$.

380. 3) 5; 4; 4) 7; -1. 381. 2) $1-\sqrt{3}$; $-(3+\sqrt{3})$; 3) $\sqrt{5}$; 0.
382. 1) $\approx -0{,}4$; $\approx -7{,}2$; 2) $\approx -0{,}3$; $\approx -4{,}4$.
385. 1) $a+b$; $a-2b$; 2) $3a-2b$; $2a-3b$; 4) 1.

386. 1) a; $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{a+b}{2}$; $\frac{b-a}{2}$. 387. 2) b; $-\frac{3}{4}b$; 4) $\frac{3m}{2}$; $-\frac{2m}{3}$.

388. 1) $\frac{b}{2}$; $-\frac{b}{6}$; 2) a; $-\frac{5a}{2}$. 389. 3) $3a$; $-2a$; 4) $\frac{a+b}{a-b}$; 1.

390. 1) $a+1$; $b+1$; 3) $\frac{a+b}{a-b}$; $\frac{a-b}{a+b}$. 391. 1) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$; $\frac{2ab}{a+b}$;
3) $-m$; $-n$. 392. 2) a; $\frac{c+n}{2}$; 3) n^2-p^2; $n+p$; 4) $\frac{a-c}{c-d}$; 1.
399. 1) $(a-b)x^2-2ax+a+b=0$.
400. 1) $x^2-2ax+a^2-b=0$; 3) $x^2-6mx+9m^2-20n^2=0$.
401. 2) $x^2+kpx+k^2q=0$. 402. 2) $4y^2+4q-p^2=0$.
403. $x^2-15x+50=0$.
404. 1) $12y^2-8y+1=0$; 2) a) $qy^2+py+1=0$. 405. 2) p^2-2q.
406. 1) $\pm p\sqrt{p^2-4q}$; 2) $3pq-p^3$; $\pm(p^2-q)\sqrt{p^2-4q}$.
407. 1) $-\frac{27}{4}$. 408. -16. 409. -2. 410. 2) -5; 4) 15; 5) a^2-b^2.

415. 3) $(x-a-b)(x-a+b)$.
416. 2) $(2x-9a)(2x-a)$; 3) $(ax-b)(bx-a)$.
417. 1) $\frac{a+13}{a+15}$; 3) $\frac{a-7b}{a+b}$. 425. 2) 36; 4) 1. 426. 1) ± 12; 2) $\frac{13}{14}$.
429. $x^2-2x-1=0$. 430. 140 *м*. 431. 28 *м*. 432. 108 *см*. 433. 5 *см* $\times$ 5 *см*.
434. 2,5 *т*. 435. 8 дней. 436. 24 *куб. м*. 437. 21 ряд. 438. 80 *км/час*; 70 *км/час*.
439. 400 *км/час*; 320 *км/час*. 440. 20 *км/час*. 441. 20 *км/час*. 442. 7 *км/час*.
446. 5 час.; 7 час. 447. 12 дней; 6 дней. 448. 30 дней; 20 дней.
449. 14 дней; 11 дней. 451. 960 *км*. 452. 18 *км/час*; 24 *км/час*.
453. 20%; 80%. 454. 20%. 455. 5%. 456. 1000 руб. 457. 11 команд.
458. 22 участника. 459. 30 учащихся. 460. 10 точек. 461. 7 сторон.
462. Восьмиугольник. 463. 4 *м*. 464. 5 *см*. 465. 3 *см*. 466. 50 *м*. 467. 3 *м*.
468. 40 *см* $\times$ 20 *см*. 469. 10 *л*. 470. 50 *км/час*; 45 *км/час*. 471. 30 *км/час*; 24 *км/час*. 472. 40 *км/час*; 50 *км/час*. 473. 16 *км/час*; 12 *км/час*.
474. 60 *км/час*; 120 *км/час*. 475. 500 *км*; 150 *км/час*; 100 *км/час*.
476. 44 *км*. 477. 84 *км*; 6 *км/час*; 4 *км/час*. 478. 40 *км/час*. 479. 30 *км/час*.
480. 32 *км/час*. 481. 21 час. 482. 48 *км*; 16 *км/час*; 20 *км/час*.
483. 18 *т*; 15 *т*. 484. 10 дней; 50 *га*; 75 *га*. 485. 20 *м*. 486. $\approx 7{,}24$ *м*.
487. 48 *см*; 36 *см*; $73\frac{1}{2}$; $10\frac{1}{2}$. 488. 12 *кГ*; 16 *кГ*. 489. 8 *кг*; 6 *кг*.
490. 5°. 491. 8,8 *Г/см*^{3}; 7,8 *Г/см*^{3}. 492. 0,8 *Г/см*^{3}; 0,6 *Г/см*^{3}. 493. 20 *см*^{3}; 30 *см*^{3}.

494. 160 *г*; 20%. **495.** 30 *м*; 24 *м*. **496.** ≈ 72 *м*. **497.** 2 сек. **498.** 100 сек.
499. 48; 16. **500.** 50 обезьян. **501.** 30 фут. **502.** 8 ед. длины.

503. $22\frac{1}{2}$ локтя и $37\frac{1}{2}$ локтя. **504.** 44 стопы. **505.** $\frac{3+\sqrt{9+3c}}{3}$ *км*.

506. $-1+\sqrt{1+2a}$ машин. **507.** $2(1+\sqrt{1+a})$ книг.

508. $\frac{3+\sqrt{9+6m}}{3}$ делянок. **509.** $t\mp 2+\sqrt{t^2+4}$ час.

510. $\frac{\mp 1+\sqrt{1+4s}}{2}$ *км/час*. **511.** $\frac{mn+\sqrt{m^2n^2+4mns}}{2m}$ *кг*.

512. $\frac{\mp at+\sqrt{a^2t^2+4adt}}{2t}$ *км/час*. **513.** $\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4abn}}{2b}$ *км/час*.

514. $\frac{\mp bm+\sqrt{b^2m^2+2bdm}}{2m}$ *км/час*. **515.** $\frac{\pm bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2c}$ изделий.

516. $\frac{\mp kt+\sqrt{k^2t^2+4kts}}{2k}$ *м*. **517.** $\frac{2m\mp a+\sqrt{4m^2+a^2}}{2}$ час.

518. $\frac{b+2c\pm a+\sqrt{a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc}}{2}$ дней.

519. $k\pm\sqrt{k^2-2kt}$ дней. **520.** $\frac{d+\sqrt{d^2+t^2v^2}}{t}$ *км/час*.

521. $\sqrt{\frac{tv^2-2nv}{t}}$ *км/час*. **522.** $\frac{\pm r+\sqrt{2c^2-r^2}}{2}$.

523. $\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4abp}}{2a}$ тонн. **524.** $a-\sqrt{ab}$ литров.

525. $\frac{-b+\sqrt{b^2+8ab}}{2}$ *км/час*. **526.** $\frac{-dt+\sqrt{d^2t^2+240adt}}{2t}$ *км/час*.

527. $\frac{-at+\sqrt{a^2t^2+120adt}}{2t}$ *км/час*. **528.** $\frac{-3v+\sqrt{9v^2+6sv}}{6}$ *км/час*.

529. $\frac{dt\mp 2d\pm\sqrt{d^2t^2+4d^2}}{2t}$ *км/час*. **530.** 1) ± 3; ± 1; 3) ± 5; ± 2.

531. 2) ± 6; ± 1; 4) ± 4; ± 3. **532.** 1) ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; 4) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

533. 2) ± 5; $\pm m$; 3) ± 3; $\pm n$. **534.** 1) 3; -5; -1; -1; 4) 1; 1; 2; $\frac{1}{2}$.

536. 1) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$; 4) $(2x+1)(2x-1)(x+1)(x-1)$.

537. 2) $\frac{x^2-5}{x^2-6}$; 4) $\frac{a^2-1}{a^2-9}$. **538.** 1) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $9x^4-148x^2+64=0$.

539. $x^4-25x^2+144=0$. **543.** 4) 5. **544.** 3) 53; 4) 61. **545.** 2) 25; 4) 3.
546. 1) 100; 3) 16; 4) 1. **547.** 2) 7; 3) 7; 4) 11.
548. 2) -3; 3) 1; 4) нет корней. **549.** 1) 1; 3) 1; 4) 3.

550. 1) 10; 2) 34; 2; 4) 1. **551.** 1) 2; 3) 1. **552.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 3) 2401.

553. 2) 19; 84; 3) $\pm 3\sqrt{2}$; 4) 0; -5. **554.** 1) 4; -1; 2) 9; -2; 3) 2; -5.

555. 1) a^2+2; 2) a^2-2a+2; 3) 1. **556.** 1) 1; 2) 0; a; 3) a; b; 4) $\frac{4a}{3}$.

Глава V.

Системы уравнений второй степени с двумя неизвестными.

604. 1) (0,25; 7,75); $(-2; 1)$; 2) (17; 10); $(4; -3)$. **605.** 1) (0; 0); $(-2{,}4; 4{,}8)$; 2) (6; 9); $(-9; -6)$.

606. 1) (8; 4); (4; 8); 2) (5; 1); $(-1; -5)$; 3) (2; 3); (3; 2); 4) (3; 0); $(1; -2)$.

607. 1) $(2a; -a)$; $(-a; 2a)$; 3) $(2a; a)$; $(a; 2a)$.

608. 3) (4; 2); $(16; -10)$; 4) (3; 2); (2; 1). **609.** 1) (3; 4); (1; 2); 3) (4; 0); $\left(-\frac{1}{2}; -4\frac{1}{2}\right)$. **610.** 1) (2; 3); $(51; -46)$; 3) (1; 2).

611. 1) $(a^2-1; a+1)$; $[-(a^2-1); -(a+1)]$; 4) $(a-1, a+1)$; $(a+1; a-1)$. **615.** 2) (3; 1); (1; 3); 3) (5; 2); $(-2; -5)$; 4) (5; 4); (4; 5).

616. 1) (3; 2); $(3; -3)$; $(-4; 2)$; $(-4; -3)$; 2) (0; 0); (4; 2); $(-2; -4)$; 4) (3; 1); $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **617.** 2) (2; 3); (0; 1); $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$; 3) $(2+\sqrt{5}; \sqrt{5})$; $(2-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$; (0; 2); (3; 2).

618. 1) $\left(\frac{\pm a}{\sqrt{a+b}}; \frac{\pm b}{\sqrt{a+b}}\right)$; 4) $(4m; m)$; $\left(-m; -\frac{m}{4}\right)$.

619. 1) (4; 1); (1; 4); 2) (7; 1); (1; 7); 3) $(5; -3)$; $(-3; 5)$; 4) $(-9; 4)$; $(4; -9)$.

620. 1) (9; 2); $(-2; -9)$; 2) (5; 3); $(-3; -5)$; 3) $(12; -4)$; $(4; -12)$; 4) $(2; -1)$; $(1; -2)$.

621. 1) $(2a; -a)$; $(-a; 2a)$; 2) $(3a; -a)$; $(-a; 3a)$; 3) $(2b; b)$; $(-b; -2b)$; 4) $(a+b; b)$; $(b; a+b)$.

622. 1) $(\pm 3; \pm 2)$; $(\pm 2; \pm 3)$; 2) $(\pm 5; \pm 4)$; $(\pm 4; \pm 5)$; 3) $(\pm 3; \pm 1)$; $(\pm 1; \pm 3)$; 4) $(\pm 5; \pm 3)$; $(\pm 3; \pm 5)$.

623. 2) $\left(\pm\frac{a}{3}; \pm\frac{a}{2}\right)$; $\left(\pm\frac{a}{2}; \pm\frac{a}{3}\right)$; 4) $(\pm a; \pm 2b)$; $(\pm 2b; \pm a)$.

624. 1) $(\pm 5; \pm 3)$; $(\pm 3; \pm 5)$; 2) (5; 1); $(-5; -1)$; 3) $(\pm 5; \pm 4)$; 4) $(\pm 3; \pm 2)$; $(\mp 2; \pm 3)$. **625.** 1) (8; 2); (2; 8); 2) (25; 16); (16; 25); 3) (9; 4); 4) (1; 4); (4; 1).

626. 1) $\left(\pm\frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}\right)$; $(\pm 2; \mp 1)$; 2) $(\pm 2; \pm 8)$; $(\pm 8{,}5; \mp 5)$; 3) $(\pm 1; \pm 2)$; $(\pm 2; \pm 1)$; 4) $(\pm 3; \pm 5)$; $\left(\pm 1\frac{2}{3}; \pm 4\frac{1}{3}\right)$.

627. 1) $(\pm 3; \pm 1)$; $(\mp\sqrt{2}; \pm 2\sqrt{2})$; 3) $(\pm 2; \pm 3)$; $(\pm 3; \pm 2)$.

628. 1) (9; 4); (4; 9); 2) (5; 20); (20; 5).

629. 1) (2; 3); (3; 2); $(-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7})$; $(-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})$.

630. 1) (4; 2); (2; 4); 2) (7; 5); $(-5; -7)$. **631.** 1) $(5; -2)$; $(2; -5)$; 2) $(-6; -1)$; $(-1; -6)$. **632.** 1) (2; 1); (1; 2).

633. 2) $(a; b)$; $\left[\frac{a(a-b)}{a+b}; \frac{b(b-a)}{a+b}\right]$; 4) $\left[\pm\frac{a(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}; \pm\frac{b(m-n)}{\sqrt{m^2+n^2}}\right]$.

634. 1) $[(a+b)^2; (a-b)^2]$.

635. 1) $(2; -1; 3)$; $(-3; 4; -2)$; 2) (5; 3; 4); (4; 2; 5).

636. 1) $(\pm 1; \pm 2; \pm 3)$; 2) $(\pm 2; \pm 3; \pm 4)$.

637. 1) $(\pm 1; \pm 2; \pm 3)$; $\left(\pm 2; \pm 1; \pm\frac{3}{2}\right)$; 2) $(\pm 2; \pm 2; \pm 3)$.

638. 2) (1; 4; 5); (— 1; 6; 7). **639.** 10 *см*; 4 *см*. **640.** 15 *см*; 8 *см*.
641. 60 *м*; 40 *м*. **642.** 40 *см*; 9 *см*.

643. 1) 12 *см*; 16 *см*; 20 *см*. 2) $\frac{p^2-q}{p}$; $\frac{p^2+q\pm\sqrt{(p^2-q)^2-4p^2q}}{2p}$.

644. $p-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{S^2}{p(p-a)}}$. **645.** 1) 36; 4; 2) 9; 25.

646. $\frac{2ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}$; $\frac{2a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. **647.** $m-\sqrt{m^2-n^2}$.

648. $-h+\sqrt{m^2+h^2}$. **649.** $h+\sqrt{n^2+h^2}$. **650.** 40 *км/час*; 30 *км/час*.
651. 36 *км/час*; 24 *км/час*. **652.** 15 деревьев; 10 деревьев.
653. 10 *га*, 20 *ц*; 12 *га*, 25 *ц*; 8 *га*, 25 *ц*; 10 *га*, 30 *ц*.
654. 12 *км/час*; 18 *км/час*; 24 *км*. **655.** 36 *км/час*; 30 *км/час*.
656. 800 $м^2$; 6 *кг*; 500 $м^2$; 5 *кг*; 900 $м^2$; $5\frac{1}{3}$ *кг*; 600 $м^2$; $3\frac{1}{3}$ *кг*.
657. 15 *кг*; 6*м*; 20 *кг*; 8 *м*. **658.** 80 *кГ*; 39 *кГ*.
659. 7 *кГ*; 24 *кГ*. **660.** 12 *Г*; 48 *Г*; 1,5 $Г/см^3$. **661.** 32.
662. 1 мин.; 0,2 $м/сек^2$. **663.** $\approx 0{,}054$ $м/сек^2$; 4 мин. 40 сек.
664. 2 *м/сек*; 1 мин. **665.** 6 *м/сек*; 8 *м/сек*. **666.** 30 *км/час*; 24 *км/час*.

667. $\frac{c(t+\sqrt{t^2+4nt})}{2nt}$ *м/сек*; $\frac{c(-t+\sqrt{t^2+4nt})}{2nt}$ *м/сек*.

Глава VI.

Задачи для повторения курса VIII класса.

671. 1) $\frac{b^6}{a^4}$; 1; 2) a^2+ab+b^2; 2,52.

675. 1) $\frac{4+a}{2}$; 2) $-2\frac{1}{4}$; 3) ± 2; ± 3; 4) $\pm a\sqrt{2}$. **676.** 1) 1; — 7; 2) 31.

677. 1) (± 9; ± 5); (± 5; ± 9); 2) (4; 5); $\left(72; -\frac{2}{3}\right)$;

3) (± 7; ± 3); (± 3; ± 7); 4) (± 3; ± 1); $\left(\pm 12; \mp\frac{7}{2}\right)$.

678. 1) 12 *км/час*; 9 *км/час*; 2) $\frac{4\sqrt{x-y}}{x-y}$; 3) $3x^2-4x+1=0$.

679. 1) 40 *км/час*; 2) $\frac{a^2}{x^2}$; 3) 3; — 1. **680.** 1) 20 рядов; 2) 0; $a-b$; 3) $\frac{1}{4}\sqrt{48}$.

681. 1) 30 дней; 20 дней; 2) 1; 3) 2. **682.** 1) 30 *км/час*; 2) 5; 1; 3) 19.

683. 1) 8 час.; 2) (3; 2); (2; 3); 3) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

684. 1) 20 *км/час*; 2) 1; 3) (9; 25); (25; 9).

685. 1) $\frac{60d+\sqrt{3600d^2+t^2v^2}}{t}$ *км/час*. 2) a; b; 3) (6; 2); (— 2; — 6).

Глава VII.

Пределы.

691. 3) $n > 10001$. **692.** 3) $n > 100$. **694.** 3) $n > 100$. **695.** 3) $n > 2000$.
697. 2) $n > 53$; $n > 140$. **701.** 1) $n > 99$; $n > 999$; $n > 9999$. **706.** 1) 3; 2) 1; 3) 1; 4) 4.
707. 5) $2\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{2}{3}$; 8) $34\frac{1}{6}$. **708.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $1\frac{1}{2}$. **709.** 2) 0; 4) 2. **710.** 1) 4; 2) -1; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{1}{2}$.

Глава VIII.

Прогрессии.

711. 645 *см*. **723.** a; $\frac{am+b}{m+1}$; $\frac{a(m-1)+2b}{m+1}$. **724.** 1) 1430; 4) $45a+36b$.
729. 1; 3. **730.** 14; -7; 8. **732.** 1) 1; 3; 3) 8; -3. **733.** 1) 10; 2,5; 19.
734. 1) 3; 2 или -17; 2; 3) 0; 3 или -12; 4,2. **735.** 1) $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$.
736. 1) 25; 3) 1. **737.** 1) $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{3}$; 3) 1; $\frac{13}{5}$; $\frac{21}{5}$. **738.** 1) 8; 18; 28.
743. 156. **744.** 16°. **745.** 1) 41°; 2) 2745 *м*. **746.** 9. **748.** 4 часа. **749.** 1900 человек.
751. 5. **752.** 5; 8; 11; 14; 17. **753.** 120 брёвен. **754.** 41 *м*. **755.** 3 часа. **756.** 6 сек.
757. 4. **758.** Да. **759.** Нет. **760.** 5 мин. или 10 мин. **761.** 8 сек.
762. 600 *т*; 10 дней или 225 *т*; 5 дней. **763.** 385 ядер. **767.** 1) 160; 4) $-\frac{20}{27}$.
768. 1) $\frac{1}{64}$; 2,а) 3; 2,б) 2916. **769.** 1) 189; 4) $32\frac{31}{32}$. **770.** 1) 3; 2186 или -3; 1094.
771. 1) $\frac{1}{4}$; $1365\frac{1}{4}$; 3) 3584; 7161. **772.** 1) 3; 384; 3) 27; 8. **773.** 2) 5; 4) 6.
774. 1) 27; 81; 2) 80; 40; 20; 10. **775.** $\sqrt[7]{7}$; $\sqrt[7]{49}$; $\sqrt[7]{343}$; $\sqrt[7]{2401}$; $\sqrt[7]{16807}$; $\sqrt[7]{117649}$.
777. 1) 1; 2; или -16; $\frac{1}{2}$; 2) 1; 2. **778.** 1) 1; 2; 10; 2) 1; 3; 4. **779.** 96; 48; 24; 12; 6; 3.
780. 24; 12; 6; 3. **781.** 2; 6; 18. **785.** 4; ± 3. **786.** 3; 15; 27 ... ; 3; 9; 27 ... .
787. 1) 8; 10; 12; 2) 17; 10; 3. **788.** 3; 7; 11. **789.** 2; 5; 8. **790.** 5; 15; 45. **791.** 2; 6; 18.
792. 12; 16; 20; 25. **793.** 5; 12; 19; 26. **794.** 7; 14; 28; 56. **795.** 5; 25; 45; 5; 15; 45.
796. ≈ 10 час. **797.** ≈ 53 *мм*. **799.** 1) 2; 2) $21\frac{1}{3}$; 3) $8\frac{1}{3}$; 4) $2\frac{2}{3}$; 5) 3; 6) $4{,}5\sqrt{2}$.
800. 1) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$; 3) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{1-x}$.
801. 1) 18 или 54; 2) 243 или 486; 3) 9; 4) 8,4. **802.** 1) 0,4; 2) 1,28.
803. 1) 7,5; 2) 10; 2; 0,4 ... или 15; -3; 0,6... . **806.** 1) $\frac{13}{24}$; 2) $1\frac{1}{2}$; 3) 1.
807. 1) $6a$; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **808.** $4a(2+\sqrt{2})$; $2a^2$. **809.** 25 *см*^{2}.
810. $a^2\sqrt{3}$; $6a(2+\sqrt{3})$. **811.** $2\pi R^2$; $4R^2$. **812.** $\frac{\pi a^2}{9}$; $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$.
813. $a(1+\sqrt{2})$.

Глава IX.

Показательная и логарифмическая функции. Логарифмы.

826. 1) $\sqrt[10]{10}$; 4) $\sqrt[n]{n}$. **828.** 1) 4; 3) 7; 5) 2. **833.** 1) $-\frac{1}{2}$; 3) $2\sqrt{2}$.

834. 2) $\frac{1}{4}$; 4) -6; 6) $\frac{1}{2}$. **835.** 1) 22; 6) 24. **836.** 3) 8. **837.** 1) 9; 3) 9; 3.

851. 4) $\frac{31}{72}\log a$. **852.** 1) $\frac{5}{8}(\log a - \log b)$; 3) $\frac{1}{3}(\log a - \log b)$.

853. 1) $\frac{1}{18}(3\log 5 + 7\log m + 4\log n)$. **854.** 1) $\frac{n\log a}{n+1} - \frac{\log b}{m(n+1)}$; 3) $\sqrt[5]{4}\log 3$.

855. 1) $\sqrt[4]{0{,}5}\log 0{,}8$. **856.** 1) $\log x = \frac{1}{3}\log 1{,}2 + \log\log 1{,}6$. **860.** 3) $\sqrt[3]{(ab)^2}$;

4) $\sqrt[4]{\left(\frac{m}{n}\right)^3}$. **861.** 3) $\frac{a(a+b)^n}{\sqrt[n]{a-b}}$. **882.** 1) 38,47; 3) 26,71; 5) 630,8.

884. 1) 30,89; 2) 4,972; 3) 12,20; 4) 0,3799. **885.** 1) 148900; 2) 87,7; 4) 4,821.
886. 1) 0,2046; 3) 2,242; 4) 186,5. **887.** 2) 0,007868; 3) 1,301; 4) 1,718.
888. 1) 0,6998; 3) 0,1298. **889.** 1) $-2{,}637$; 3) $-62{,}34$; 5) $-487\,900$.
890. 2) 4,52; 3) 7,072; 4) 2,422. **891.** 1) 0,5445; 3) $-1{,}406$; 4) $-0{,}9831$.

892. 1) 1,275; 2) $-0{,}8736$. **893.** 1) $-0{,}4593$. **894.** 1) 766,5 *см*^{2}; 2) 2,671 *м*; 3) $\approx 1{,}32$ *м*^{3}. **895.** 1) 247200 *м*$^2 \approx 24{,}7$ ара; 3) 41,6 *см*.
896. 2) $\approx 26{,}9$ *кг*; 3) ≈ 405 *м*; 4) ≈ 112 *кг*. **897.** 1) 0,5533; 2) 0,2440; 3) 0,01254; 4) 0,002138. **898.** 1) $-3{,}030$; 2) $-9{,}967$; 3) 9,967; 4) 0,6294. **904.** 3) 2; 3.

905. 1) $\frac{1}{2}$; 1; 3) 35; 4) 3. **906.** 1) 24; 4) 1,5. **907.** 1) 4; 2) $\frac{5}{3}$. **910.** 2) 5; 3) 1.
911. 1) 1; 2) 1; 4) 9. **912.** 2) 1; 4) нет решений. **913.** 1) $\approx -1{,}701$; 2) $\approx 0{,}326$.
914. 1) 3; 4) 3. **915.** 2) 1; 4) -2. **916.** 1) 2; 1; 2) 0; $\frac{1}{4}$. **917.** 1) 20; 3) 4.
918. 1) 3; 3) 10; 0,0001. **919.** 2) 13; 3) 10^{10}; 4) 64. **920.** 1) 1; 2) 10; 0,1; 3) 10; 0,001; 4) 100. **921.** 1) 10; 0,1; 3) 1000; 0,1; 4) 2; 3. **923.** 1) 9; 4) 9.
924. 1) (2;1); 3) (10000; 10). **925.** 1) ($\approx 1{,}663$; $\approx 1{,}276$); 4) (16; 25); (25; 16).
926. 1) (3; 9); 2) (10; 4); (4; 10); 3) (17; 9); 4) ($\approx 2{,}272$; $\approx 1{,}825$).

Глава XI.

Задачи для повторения курса IX класса.

953. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{7}$; 3) 6; 4) 2. **954.** $a_1 = \pm\frac{1}{2}$; $q = -\frac{1}{2}$.

955. 16; 81. **957.** $\frac{1}{8}$. **959.** 2; 5; 8....

960. 1) $n + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$; 2) $\frac{7}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n)$. **967.** $\frac{4(3-a)}{3+a}$.

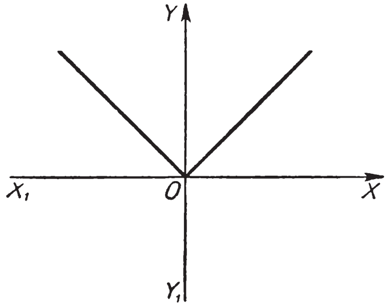
968. 2) 1; 4; 4) 100; 1000. **969.** 1) 4; 3) 81. **970.** 2) (3; 4); 4) (10; 8); 6) (10; 100); (100; 10). **971.** 1) 20; 2) 128; 2; 3) 3. **972.** 1) 3, 9, 15...; 3, 9, 27.... **975.** 1) 15; 2) 0,803. **976.** 1) 4; 8; 12; 16; 2) 31,31; 3) 100. **977.** 1) 6188; 2) 3; 3) -3.

Глава XII.

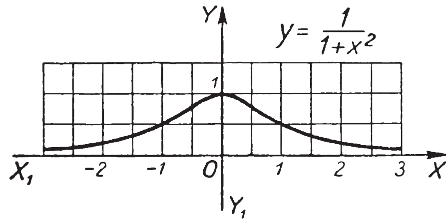
Функции и их исследование. Производная.

979. $y = 3x$. **984.** 1) $y = x$; $y = \sqrt{3}x$; $y = -x$; 2) $y = \frac{1}{2}x$.

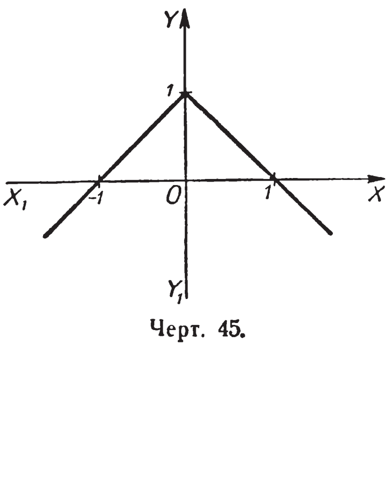
985. $y = 8000 - 400x$. **987.** $y = 9x + 5$. **988.** 3) $l = 0{,}24q + 13$.



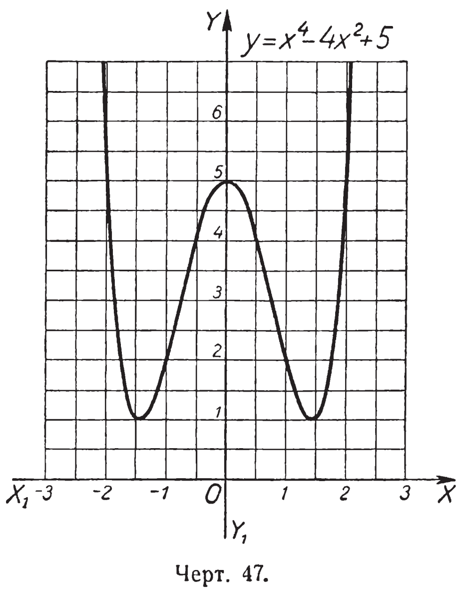
Черт. 44.



Черт. 46.



Черт. 45.



Черт. 47.

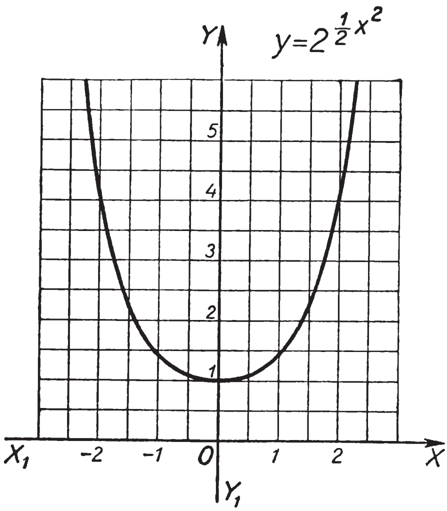
989. 3) $F \approx 10l - 500$. **990.** 3) $F \approx \frac{1}{8}P + 1{,}5$. **991.** 3) $v \approx \frac{5}{8}t + 332$.

994. 1) Черт. 44; 2) черт. 45. **1001.** $y = \frac{15}{x}$.

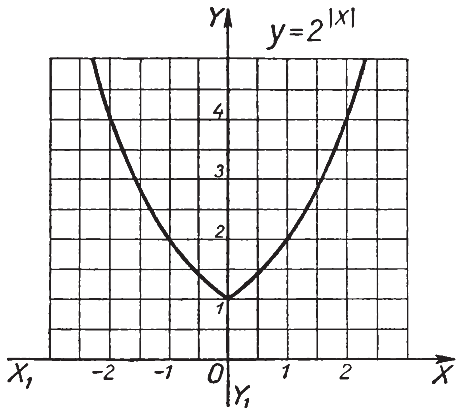
1016. $y = \frac{2}{15}(-x^2 + 13x + 30)$. **1018.** 1) Черт. 46; 2) черт. 47.

1019. 3) Черт. 48; 4) черт. 49. **1020.** 3) Черт. 50; 4) черт. 51. Точка (0;0) не принадлежит графику.

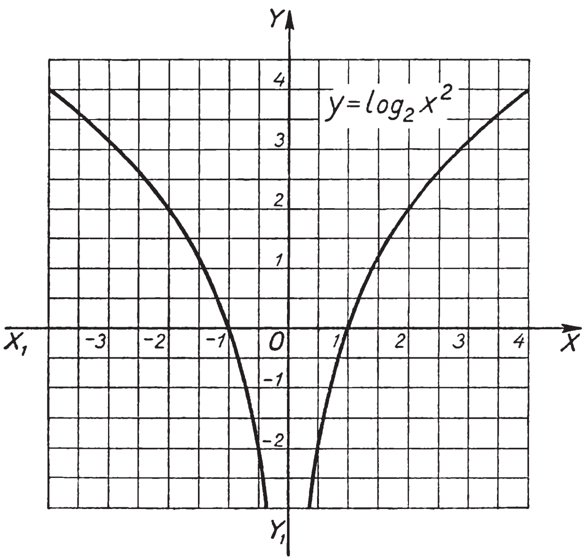
1021. 1) 4; $\approx 0{,}3$; 3) $\frac{1}{2}$; 4; 4) 1,5; 5) $\approx 1{,}3$; 10; 6) $0{,}7 < x < 0{,}8$; 7) 0;



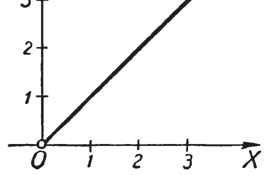
Черт. 48.



Черт. 49.



Черт. 50.



Черт. 51.

8) $\approx 4{,}9$; 9) 2; $-1{,}7 < x < -1{,}6$; 10) $-1 < x_1 < 0$; $0 < x_2 < 1$; $2 < x_3 < 3$. **1026.** 2) 0; 5) 0. **1028.** 1) 3; 3) 3; 4) 1.

1030. 1) ∞; 2) 2; 3) $-4a$; 4) -1. **1032.** 1) 4; 2) $\frac{1}{4}$;

3) 2; 4) $\frac{1}{2}$. **1034.** 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$. **1036.** 4,5 *м/сек.*

1038. 1) v_0+gt. **1039.** 1) $8t+3$; 2) 27 *м/сек.* **1040.** 1) 4°; 2) 3°,2.

1041. 1,6 *ампер/сек.* **1042.** 1) 2 *м/сек*^{2}; 2) 2 *м/сек*^{2}. **1043.** 1) $3t^2$ *м/сек;*

2) $6t$ *м/сек*^{2}. **1044.** 1) $v_{cp}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$; 2) $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$.

1046. 1) $6x$; 2) $-8x$; 3) a; 4) $10t-12t^2$; 5) $3x$; 6) $2x^2-1$; 7) $6x+5$.

1048. 1) $\operatorname{tg}\alpha=1$. **1049.** 1) 0; 2) 2.

1050. 1) 0; 3) $15x^4$; 4) $-6ax^2$; 6) $4x^3-6x^2+6x$; 8) $18x^2-30x$.

1051. 2) $r^2+\frac{1}{2}r-1$; 3) 24. **1053.** 2,5. **1054.** 1) 7 *м/сек;* 5 *м/сек*^{2}.

1055. 1) 19 *м/сек*^{2}; 2) $(6t+4)$ *км/час*^{2}; 16 *км/час*^{2}. **1056.** $v\approx 1{,}5$ *м/сек;* $a=0{,}2$ *м/сек*^{2}. **1057.** 1) 30 *м/сек;* 20 *сек;* 2) (t^3-12t^2+32t) *км/час;* $(3t^2-24t+32)$ *км/час*^{2}. **1058.** 500 дин. **1059.** 13 *м/сек*^{2}; 12 *м/сек*^{2}.

1060. 1) $-6x^2+14x-3$; 2) $6x^2-26x+12$; 3) $-36x^2+4x+5$;
4) $12x^3+72x^2+102x+12$.

1061. 1) $-\cos x$; 2) $1+\sin x$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x}-2$; 4) $1-\frac{1}{\sin^2 x}$;
5) $2\sin x$; 6) $2x\sin x+x^2\cos x$; 7) $\cos 2x$; 8) $\cos 2x+\cos x$.

1062. 1) $2\cos 2x$; 2) $-\sin 2t$; 3) $\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 4) $\cos\frac{3}{4}x\sin\frac{1}{4}x$;
5) $\frac{1}{2}\sin\frac{5}{2}x$.

1063. 1) $\sin 2x$; 2) $-\sin 2x$; 3) $2\sin 4x$; 4) $-\sin x\left(10\cos x-\frac{1}{2}\right)$.

1069. 1) Функция возрастает в любом промежутке;

2) функция возрастает в промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right)$, убывает в промежутке $\left(-\frac{4}{3};\ 2\right)$;

3) функция возрастает в промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(2;+\infty)$, убывает в промежутке $(0;\ 2)$;

4) функция возрастает при $x<1$ и при $x>2$, убывает, если $1<x<2$.

1070. 1) Функция возрастает в промежутках $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$, убывает в промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$;

2) функция возрастает в промежутках $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$, убывает в промежутках $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

1071. 1) Минимум в точке $\left(\frac{2}{3};\ 4\frac{2}{3}\right)$; 2) максимум в точке $\left(\frac{3}{2};\ 7\frac{1}{4}\right)$;

3) функция не имеет ни максимума, ни минимума;

4) максимум в точке $\left(1;\ 12\frac{1}{3}\right)$, минимум в точке $\left(5;\ 1\frac{2}{3}\right)$.

1072. 1) (1; 2); 2) $\left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}\right)$; 3) (1; —4); 4) (—2; 1).

1073. 1) Максимум в точках (2; 5) и (—2; 5), минимум в точке (0; 1); 2) максимум в точке $\left(-1;\ 7\frac{1}{6}\right)$, минимум — $\left(2;\ 2\frac{2}{3}\right)$; 3) нет ни максимума, ни минимума;

4) максимум в точке (—2; 10), минимум—(1; —17).

1074. 35 и 35. **1075.** 40 *м* и 40 *м*. **1076.** 10 *см*.

1077. Ширина $d\frac{\sqrt{3}}{3}$ *см*, высота $\frac{d\sqrt{6}}{3}$ *см*.

1078. 1) В промежутке (—1; 1) функция возрастает от —3 до 1, в промежутке (1; 3) убывает от 1 до —3, максимум в точке (1; 1);

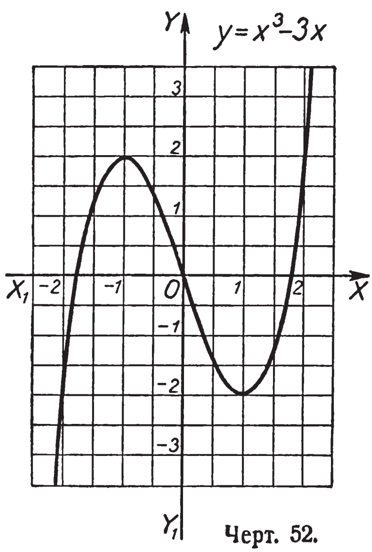
2) в промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ функция возрастает от 0 до 1, в промежутке $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$ убывает от 1 до —1, в промежутке $\left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$ возрастает от —1 до 0, максимум в точке $\left(\frac{\pi}{4};\ 1\right)$, минимум в точке $\left(\frac{3\pi}{4};\ -1\right)$;

3) максимум в точке $\left(\frac{\pi}{12}\approx 0{,}26;\ \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}13\right)$, минимум в точке $\left(\frac{5\pi}{12}\approx 1{,}31;\ \frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}44\right)$;

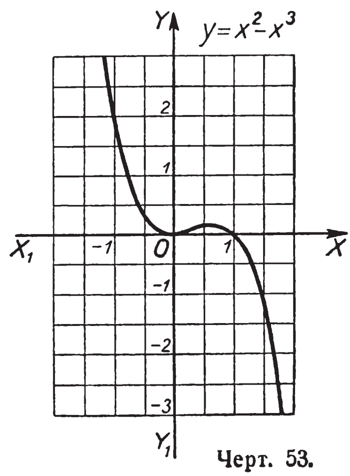
4) функция в данном промежутке монотонно возрастает.

1080. 1) Функция возрастает в промежутках $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ убывает в промежутке (—1, 1), максимум в точке (—1, 2), минимум — (1, —2) (черт. 52);

2) функция возрастает, если $0 < x < \frac{2}{3}$, убывает в промежутках $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; максимум в точке $\left(\frac{2}{3};\ \frac{4}{27}\right)$, минимум в точке (0; 0) (черт. 53);



Черт. 52.



Черт. 53.

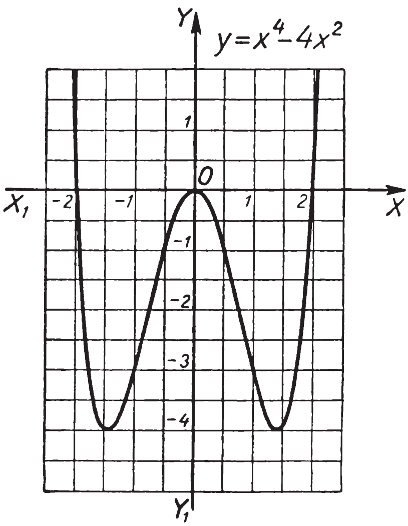
3) функция возрастает в промежутке $(2; +\infty)$, убывает в промежутке $(-\infty; 2)$, минимум в точке $(2; -12)$;

4) функция возрастает в промежутках $(-\sqrt{2}; 0)$ и $(\sqrt{2}; +\infty)$, убывает — $(-\infty; -\sqrt{2})$ и $(0; \sqrt{2})$, максимум в точке $(0;0)$, минимум в точках $(-\sqrt{2}; -4)$ и $(\sqrt{2}; -4)$ (черт. 54).

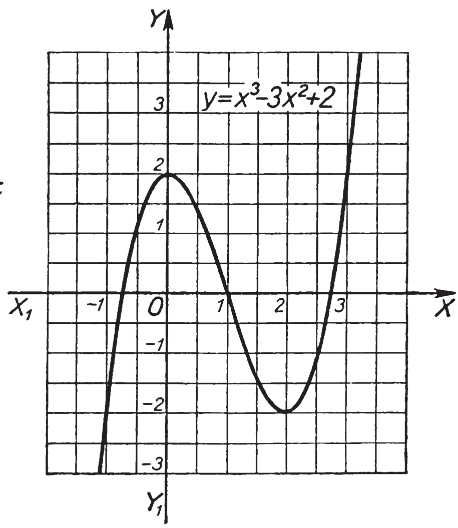
1081. 1) Функция возрастает в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, убывает в промежутке $(0; 2)$, максимум в точке $(0; 2)$, минимум в точке $(2; -2)$ (черт. 55);

2) функция возрастает в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, убывает в промежутке $(0; 2)$, максимум в точке $\left(0; \frac{1}{3}\right)$, минимум — $(2; -1)$;

3) функция возрастает в промежутках $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{26}; 0\right)$ и $\left(\frac{1}{2}\sqrt{26}; +\infty\right)$,



Черт. 54.



Черт. 55.

убывает в промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\sqrt{26}\right)$ и $\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{26}\right)$, максимум в точке $(0; 3{,}6)$, минимум в точках $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{26}; -\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}\sqrt{26}; -\frac{5}{8}\right)$ (черт. 56);

4) функция возрастает в промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, убывает в промежутках $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$, максимум в точках $(-1; 0)$ и $(1; 0)$, минимум в точке $(0; -1)$ (черт. 57).

1082. 100 *м*; 50 *м*. **1083.** 6 *дм*; 3 *дм*. **1084.** 6 *см*.

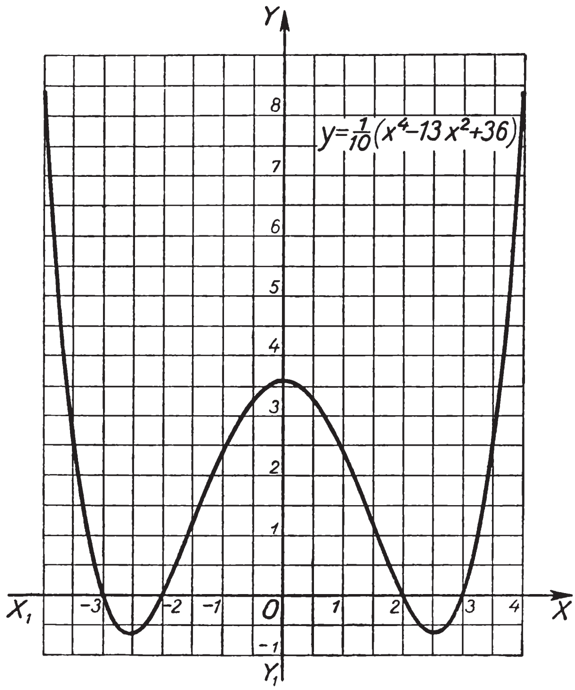
1085. $\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$; $\frac{a}{b}$ при $a=b$. **1086.** $h=r=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$. **1087.** 4 *дм*; 2 *дм*.

1088. 3 *дм*; 6 *дм*; 2 *дм*. **1089.** $r=\sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$ *дм*; $h=2\sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$ *дм*.

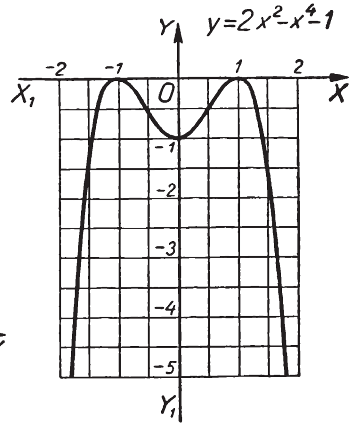
1091. $h=r$. **1092.** $t=2$; $v=12$ *м/сек*.

1093. $\frac{12}{4+\pi}\approx 1,68$ *м*; $\frac{6}{4+\pi}\approx 0,84$ *м*.

1094. $h=r=\frac{2p}{4+\pi}$ **1095.** Квадрат. **1096.** $\frac{20}{3}\sqrt{3}\approx 11,5$ *см*. **1097.** $\varphi=120°$.



Черт. 56.



Черт. 57.

Глава XIII.

Комплексные числа.

1119. 1) $3+7i$; 3) $\frac{13}{20}-\frac{7}{4}i$. **1120.** 1) $3a+3bi$; 3) $-(8c+2di)$.

1127. 2) $3-11i$; 6) $-2i$. **1128.** 2) 28; 5) $k+n$.

1129. 1) $(a+bi)(a-bi)$; 6) $(4+5i)(4-5i)$.

1130. 2) $(\sqrt{a}+i\sqrt{2})(\sqrt{a}-i\sqrt{2})$; 4) $(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$.

1132. 4) $1-i$. **1133.** 3) $1-2i$. **1134.** 1) $-1+i$; 3) i.

1135. 2) $1-2i\sqrt{2}$. **1136.** 2) $\sqrt{2}$; 4) $-i\sqrt{m}$. **1137.** 3) $\frac{a^2-n}{a^2+n}+\frac{2a\sqrt{n}}{a^2+n}i$.

1141. 1) $(1-4a^2)+4ai$; 2) $(4-b^2)+4bi$.

1142. 1) $-2+2i$; 3) $-10+9i\sqrt{3}$. **1143.** 1) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) -4.

1146. 1) 0; 3) $2m$; 4) 1. **1147.** 1) 4; 2; 5) $\frac{1}{a}$; 0.

1150. 1) $3x^2+2x+27=0$; 3) $x^2-(5-3i)x+(4-7i)=0$.

1151. 1) -1; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 3) -3; $\frac{3\pm 3i\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{5}{3}$; $\frac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{6}$;

7) ± 2; $\pm 2i$; 8) ± 3; $\pm 3i$; 9) 6; $-\frac{7}{3}$; 11) 1; 2; $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; $-1\pm i\sqrt{3}$.

Глава XIV.

Неравенства и исследование уравнений.

1156. 2) $x<2\frac{1}{4}$. **1158.** 1) $5<x<27$. **1159.** 1) Нет решения; 2) $x>9$.

1160. 2) $x>0$. **1161.** 1) 4; 5; 6; ...; 3) 3; 4; 5. **1163.** 1) $-\frac{1}{3}<x<2$;

2) $-2\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$. **1165.** 24; 35. **1166.** $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$.

1167. 86. **1168.** $92{,}5<x<102$. **1178.** 1) $t>5$; 2) $t>-1$; 4) $t>0$; 6) $t<4$; $t>6$. **1179.** 2) $k<0$; $k>1$; 3) $k>5$; $k<3$; 4) $1<k<2$, кроме $k=1{,}5$; 5) $-2<k<1$.

1180. 1) $x=\frac{a-5}{a-3}$ при $a-3\neq 0$; $x>0$ при $a>5$ и при $a<3$;

$x<0$ при $3<a<5$; $x=0$ при $a=5$; нет решения при $a=3$;

2) $x=\frac{2m-3}{2m+1}$ при $2m+1\neq 0$; $x>0$ при $m>\frac{3}{2}$

и при $m<-\frac{1}{2}$; $x<0$ при $-\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$;

$x=0$ при $m=\frac{3}{2}$; нет решения при $m=-\frac{1}{2}$; 3) $x=\frac{b(a-1)}{3a-b}$

при $3a-b\neq 0$; $x>0$ при $\begin{cases} b>0, \\ a>\frac{b}{3}>1; \end{cases}$ $\begin{cases} b>0, \\ a<\frac{b}{3}<1; \end{cases}$

$\begin{cases} b<0, \\ \frac{b}{3}<a<1. \end{cases}$ **1181.** $a<3$; $a>4$. **1182.** $x=\frac{a-2b}{d}$ дней;

$x>0$ при $\begin{cases} a>2b, \\ d>0. \end{cases}$ **1183.** $x=\frac{ab}{b-a}$ час.; $x>0$ при $\begin{cases} a>0, \\ b>0, \\ b>a. \end{cases}$

1184. $x=\frac{q-p}{a-b}$ дней; $x>0$ при 1) $\begin{cases} q>p, \\ a>b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} q<p, \\ a<b. \end{cases}$

1185. $x=\frac{a-b}{n-m}$ лет; $x>0$ при 1) $\begin{cases} a>b, \\ n>m; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a<b, \\ n<m. \end{cases}$

1186. $x=\frac{m(n-q)}{q}$ литров; $x>0$ при $\begin{cases} m>0, \\ q>0, \\ n>q. \end{cases}$

1187. $x=\frac{d}{a-b}$ час. при $\begin{cases} d>0, \\ a>b. \end{cases}$ **1191.** $28<m<30$.

1192. $10<k<12$. **1193.** 1) 10; 6. **1194.** 1) $\frac{3}{2}$.

1196. $\frac{an-bm}{n-m}$ *кг* при $\begin{cases} a>b, \\ n>m; \end{cases}$ $\frac{a-b}{n-m}$ *кг* при $\begin{cases} a>b, \\ n>m. \end{cases}$

1197. $\frac{th_1-ht_1}{h_1-h}$ градусов; $\frac{t_1-t}{h_1-h}$ градусов. **1198.** $\frac{n-m}{a-b}$ час.; $\frac{an-bm}{a-b}$ *км.*

1199. $\frac{k-bm}{a-b}$ *кг*; $\frac{am-k}{a-b}$ *кг*. **1200.** $\frac{d(a-m)}{an-bm}$ руб.; $\frac{d(n-b)}{an-bm}$ руб.

1201. $\frac{ak-bt}{a-b}$ градусов; $\frac{at-bk}{a-b}$ градусов.

1202. 2) Любое число (действительное); 4) $x>3$; $x<1$.

1203. 1) $x>2$; $x<-\frac{1}{3}$; 4) любое число (действительное).

1204. 1) $1<x<2$; $x>3$.

1205. 1) $x<-3$; $x>1$; 3) $1<x<1{,}5$; $x>2$.

1207. 1) $m>1$; 4) $m>11$.

1208. 1) $m<-7{,}2$; 3) $0<m<28$.

1209. 1) $\frac{33}{23}$; 3) 2; $\frac{1}{2}$. **1210.** 2; -16; 24. **1211.** -4; 4; 24.

1212. 3; -36; 96. **1213.** 2; 8; 15.

1215. $\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4000abs}}{2b}$ литров; $\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4000abs}}{2b}$ литров.

1217. $\frac{-tv+\sqrt{t^2v^2+240stv}}{120t}$ *м/мин.*

1219. $\frac{-bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2c}$ *км.* **1221.** $\frac{\mp pt+\sqrt{p^2t^2+4npt}}{2t}$ *га.*

1222. $\frac{\pm kt+\sqrt{k^2t^2+4kmt}}{2t}$ тонн. **1223.** $\frac{\mp bm+\sqrt{b^2m^2+4abm}}{2m}$ *ц.*

1224. $\frac{n+m\mp t+\sqrt{(n+m-t)^2+4nt}}{2}$ дней. **1226.** $\frac{a\sqrt{5}-1}{4t}$ *км/час*;

$\frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$ *км/час.*

Глава XV.

Задачи для повторения.

1228. 1) $\frac{pn+\sqrt{p^2n^2+400nps}}{2p}$ деталей; 2) 2; 3) 0; 7;

4) функция возрастает в промежутке $\left(-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, убывает в промежутках $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$,

максимум при $x=\frac{2}{3}$, минимум при $x=-\frac{2}{3}$.

1229. 1) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$; 3) 10; 4) (3; 4); (—8; —1,5).

1230. 1) 4 *км*; 3) 16; 4) —5. **1231.** 1) 2,5 *см*; 5 *см*; 3) $x > -1$;

4) функция возрастает в промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $\left(1; +\infty\right)$, убывает в промежутке $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$,

максимум при $x = -\frac{1}{3}$, минимум при $x = 1$.

1232. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{2}R$; $\frac{4}{3}R$; 2) $x > 3$; $\frac{1}{2} < x < 2$;

4) функция возрастает в промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $\left(2; +\infty\right)$, убывает в промежутке $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$, максимум при $x = -\frac{1}{3}$,

минимум при $x = 2$.

1233. 1) $b + \sqrt{b^2 - ab}$ дней *A*; 2) $\frac{26}{81}$; 3) $2 < x < 10$.

1234. 1) $\left(\frac{l}{2} + \frac{ap}{200q}\right)$ *км* от *A*; 2) 2; 3) *b*; 4) 9; 4.

1235. 1) $\frac{2}{3}R$; $\frac{1}{3}H$; 3) 6188; 4) 8. **1236.** 1) $\frac{abnq - bcmp}{amp}$ рабочих;

2) $\frac{1}{6}$; 3) $x < -21\frac{8}{13}$; 4) $\sqrt{6}$ или $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

1237. 1) 1960 *м*; 2) $1\frac{2}{3} < a < 6$. **1238.** 1) $\frac{mp + \sqrt{m^2p^2 + 4mnp}}{2p}$ рядов; 3) 4.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава XIV. Неравенства и исследование уравнений. *Стр.*

Павел Афанасьевич Ларичев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ, Ч. II.

Редактор *Н. И. Лепёшкина*
Технический редактор *Н. Н. Махова*
Корректор *З. И. Почаева*

Подписано к печати с матриц 22/I 1958 г. $60\times92^{1}/_{16}$.
Печ. л. 14. Уч.-изд. л. 13,19. Тираж 800 тыс. экз.
Заказ № 1417. Цена без переплёта 1 р. 70 к.
Переплёт 75 коп.